

Capa e desenhos do arquiteto

HUGO RIBEIRO

Exemplar Nº 8 13

1967

Impresso no Brasil

ARY QUINTELLA

(Professor Catedrático do Colégio Militar)

MATEMÁTICA

para o

SEGUNDO ANO COLEGIAL

18.^a edição

Revista e ampliada com as questões
dos últimos Concursos de Habilitação
às diversas Universidades do país.

(538 exercícios)



COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

CURSO ELEMENTAR

Iniciando a matemática moderna — nível 1.

CURSO DE ADMISSÃO :

Matemática.

CURSO GINASIAL :

Matemática — primeira série ginasial.

Matemática — segunda série ginasial.

Matemática — terceira série ginasial.

Matemática — quarta série ginasial.

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO :

Matemática — primeiro ano.

Matemática — terceiro ano.

CURSO COMERCIAL BÁSICO : (esgotados) :

Aritmética prática, para o primeiro ano.

Matemática, para o segundo ano.

Álgebra Elementar, para o terceiro ano.

EXAME DE MADUREZA :

Guia de Matemática, para os exames do Artigo 91.

CURSO VESTIBULAR :

(Em colaboração com o Prof. VICTALINO ALVES)

Matemática. Questões de Concurso nas Escolas Superiores.

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo 2, SP

★

CURSO NORMAL :

(Em colaboração com os Profs. FRANCISCO JUNQUEIRA e DACORSO NETTO)

Matemática. 1.º ano dos Cursos Normais (GB)

ÍNDICE GERAL

<i>Índice dos Exercícios.....</i>	7
<i>Introdução.....</i>	11

PRIMEIRA PARTE

ÁLGEBRA

UNIDADE I: Análise combinatória simples

Definições.....	15	Inversão. Classe de uma permutação.....	20
Arranjos simples.....	16	Permutações com objetos repetidos.....	22
Permutações com objetos distintos.....	20	Combinações simples.....	23

UNIDADE II: Binômio de Newton

Produto de binômios distintos.....	31	Propriedades do Binômio de Newton.....	34
Binômio de Newton.....	32	Triângulo de Pascal.....	37
Térmo geral.....	33	Soma das potências semelhantes.....	37

UNIDADE III: Determinantes. Sistemas lineares

Definições.....	41	Conseqüências do teorema de Laplace.....	50
Cálculo do determinante de 2.ª ordem.....	43	Cálculo de um determinante.....	56
Cálculo do determinante de 3.ª ordem.....	44	Regra prática de Chió.....	57
Propriedades fundamentais..	44	Sistemas lineares.....	60
Determinante menor. Adjunto.....	46	Teorema de Cramer.....	61
Desenvolvimento.....	47	Regra de Cramer.....	62
		Teorema de Rouché.....	64

SEGUNDA PARTE

TRIGONOMETRIA

UNIDADE IV: Vetores. Funções circulares diretas

Vetores	77	Relações entre as funções circulares de um mesmo arco.	101
Projeções ortogonais	81		
Arcos e ângulos	83	Cálculo das linhas dos arcos $\frac{\pi}{n}$	111
Funções circulares diretas...	89		

UNIDADE V: Arcos de extremidades associadas. Aplicações

Arcos côngruos	115	Arcos negativos	120
Arcos associados	115	Arcos que correspondem a uma linha dada	121
Relações entre as funções dos arcos associados	117	Funções circulares inversas ..	121
Redução ao primeiro quadrante	119		

UNIDADE VI: Operações com arcos

Medida algébrica de um vetor	129	Fórmulas em função da tangente da metade	137
Adição de arcos	130	Divisão de arcos	139
Subtração de arcos	132		
Multiplicação	134		

UNIDADE VII: Cálculo por logaritmos

Transformações de somas e diferenças em produtos...	147	Cálculo de expressões por logaritmos	156
Tábuas de logaritmos. . .	151		

UNIDADE VIII: Equações trigonométricas

Definição	159	Equações com mais de uma função do arco incógnito ..	160
Equações com uma função do arco incógnito	159	Método da tangente da metade	163

UNIDADE IX: Resolução de triângulos

Relações entre os elementos de um triângulo retângulo	167	Relações entre os elementos de um triângulo obliquângulo	173
Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos ..	169	Casos clássicos de triângulos obliquângulos	175

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

	Pág.
1. Análise combinatória simples	28
2. Binômio de Newton	38
3. Determinantes	58
4. Sistemas lineares	72
5. Generalização da noção de arco	88
6. Variação das funções circulares	99
7. Relações entre as linhas do mesmo arco	109
8. Arcos forma π/n	112
9. Arcos associados	125
10. Redução ao primeiro quadrante	125
11. Funções circulares inversas	126
12. Operações com arcos	140
13. Transformações em produto	156
14. Uso das tábuas de logaritmos das funções circulares	156
15. Cálculo de expressões por logaritmos	157
16. Equações trigonométricas	164
17. Triângulos retângulos e obliquângulos	184
18. Problemas de geometria	185

Matemática

NOTA A 10.^a EDIÇÃO

NA PRESENTE EDIÇÃO conservamos a *tábua de logaritmos a 4 decimais*, que julgamos garantir uma cobertura total a tôdas necessidades do aprendizado nos Cursos de Ensino de Grau Médio (2.^o Ciclo), inclusive em relação às exigências dos Concursos de Habilitação aos Cursos Universitários. A par disso, representa uma inequívoca economia para os estudantes, pois seu custo, em volume destacado, sem o desbastamento de páginas obtido com a redução a 4 decimais, seria maior que o do próprio compêndio.

O número de exercícios foi consideravelmente aumentado, tendo sido incluídos com a finalidade de atender não só a classes mais interessadas do Curso Colegial, como principalmente aos candidatos a exames vestibulares, sempre com o título "Questões de Concurso de Habilitação". Devem ser propostas, de preferência, aos estudantes que mostrarem maior pendor para a disciplina, ou cujo destino sejam as Escolas de Grau Superior.

Estimaríamos, com todo empenho, receber dos prezados colegas suas impressões sobre os resultados obtidos com este nosso compêndio, porque estamos certos de que uma obra didática deve representar a experiência pessoal de quantos a utilizam nas atividades da nobre função docente.

ARY QUINTELLA

Rua General Artigas, 523/301
Leblon — Rio Z.C.20

PRIMEIRA PARTE

ÁLGEBRA

- I. *Análise Combinatória Simples.*
- II. *Binômio de Newton.*
- III. *Determinantes.*
- IV. *Sistemas de Equações Lineares.*

UNIDADE I

ANÁLISE COMBINATÓRIA SIMPLES

1. Definições.

- 1.^a) **Análise combinatória** é o estudo dos agrupamentos que se podem formar com os elementos de um conjunto finito, segundo leis prefixadas.
- 2.^a) **Agrupamento simples** é aquele em que cada elemento do conjunto figura uma única vez, isto é, em que não se considera a repetição, no mesmo grupo, de um elemento do conjunto.

Em caso contrário, os agrupamentos denominam-se com *repetição ou completos*.

Exemplo:

Consideremos as três letras a, b, c , representando os elementos de um conjunto.

Formaremos agrupamentos simples de duas letras, escrevendo: ab, ac, bc .

E com repetição ou completos:

aa, ab, ac, bb, bc, cc .

- 3.^a) **Taxa ou classe** do agrupamento é o número de elementos do conjunto considerados em cada grupo.
- No exemplo anterior a classe ou a taxa é 2.

- 4.^a) **Fatorial** de um número n é o produto dos números naturais de 1 a n que se representa pelo símbolo $n!$ ou $\underline{n}$. Assim:

$$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5.040.$$

2. Agrupamentos simples. Os agrupamentos simples são, essencialmente, de três tipos: *arranjos* ou *disposições simples*, *permutações* e *combinações simples*.

a) Arranjos simples.

São os agrupamentos em que o número de objetos de cada grupo é menor que o total, um elemento figura uma só vez em cada grupo, e dois agrupamentos diferem pela *natureza* ou pela *ordem* dos elementos que nêles figuram.

Assim, os arranjos simples dos três elementos a, b, c , com taxa 2, serão:

$ab, ac, bc,$
 $ba, ca, cb,$

onde os arranjos dispostos em linha diferem pela *natureza* e os dispostos em coluna diferem pela *ordem* dos elementos.

O número de arranjos ou disposições simples de n elementos com taxa p representa-se por um dos símbolos:

$$A_n^p \quad A_{n,p} \quad D_n^p \quad \text{ou} \quad D_{n,p}$$

b) Permutações.

São agrupamentos formados com *todos os* n elementos do conjunto, diferindo dois agrupamentos apenas pela *ordem* dos elementos.

Exemplo:

As permutações dos três elementos a, b, c , serão:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba,$

O número de permutações de n elementos representa-se com o símbolo P_n .

OBSERVAÇÃO. As permutações são um caso particular dos arranjos em que a taxa é igual ao número de elementos ($p = n$); isto é:

$$P_n = A_n^n$$

c) Combinações simples.

São agrupamentos em que o número de elementos de cada grupo é menor que o total, em cada grupo um elemento figura uma só vez e dois agrupamentos diferem pela *natureza* de, pelo menos, um elemento.

Exemplo:

As combinações simples dos três elementos a, b, c , serão:
 $ab, ac, bc.$

Observa-se que os agrupamentos ab e ba não são considerados como combinações distintas.

O número de combinações simples de n elementos com taxa p representa-se por um dos símbolos:

$$C_n^p \quad C_{n,p} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{p}$$

OBSERVAÇÃO. Se permutarmos os elementos de um agrupamento do tipo combinações, obteremos agrupamentos do tipo arranjos. Assim, cada combinação fornece tantos arranjos quantas são as permutações da taxa; logo, podemos concluir:

$$C_n^r \times P_r = A_n^r$$

Exemplo:

Suponhamos os quatro elementos a, b, c, d . O quadro das combinações de taxa 2 será:

ab	ac	ad
bc	bd	
cd		

que foi formado, colocando-se à direita de um elemento cada um dos seguintes. Temos seis combinações.

Permutando os elementos, o grupo ab , por exemplo, dará os dois arranjos: ab , ba e, assim, os demais. O número de arranjos será:

$$6 \times 2 = 12$$

Temos, portanto: $A_4^2 = C_4^2 \times P_2$.

3. Formação dos arranjos simples.

Teorema fundamental. Suponhamos n elementos representados pelas letras $a, b, c, \dots, l$. Os arranjos com taxa 1, serão, evidentemente:

$a, b, c, \dots, l$.

e teremos:

$$A_n^1 = n.$$

Para formar os arranjos de taxa 2, colocaremos, adiante de cada uma daquelas letras, sucessivamente, cada uma das $n-1$ restantes:

		n columnas			
$n-1$ linhas		ab	ba	$ca \dots la$	
		ac	bc	$cb \dots lb$	
					
		al	bl	$cl \dots lk$	

Dêse modo, cada grupo de 1 fornece $n-1$ grupos de 2 e nenhum arranjo está omitido nem repetido.

Podemos, pois concluir:

$$A_n^2 = A_n^1 (n-1)$$

Procedendo análogamente, para passar aos arranjos de taxa 3, colocaremos adiante de cada grupo de 2, sucessivamente, cada um dos $n-2$ restantes. Assim, cada grupo de 2 fornecerá $n-2$ grupos de 3 e teremos:

$$A_n^3 = A_n^2 (n-2)$$

De modo geral, se tivermos um grupo de i elementos

$abc \dots i$

e colocarmos, à direita, cada um dos $n-i$ restantes, obteremos $n-i$ grupos de $i+1$ elementos:

$abc \dots ij, abc \dots ik, \text{ etc, } abc \dots il$.

Da formação do quadro conclui-se o teorema fundamental:

$$A_n^{i+1} = A_n^i (n-i)$$

4. Fórmula do número de arranjos simples de objetos distintos. Para a taxa $p=1$ temos, com evidência, $A_n^1 = n$, e, fazendo, sucessivamente, $i=1, 2, 3, \dots, p-1$, no teorema fundamental, obteremos as igualdades:

$$A_n^1 = n$$

$$A_n^2 = A_n^1 (n-1)$$

$$A_n^3 = A_n^2 (n-2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_n^p = A_n^{p-1} (n-p+1)$$

Multiplicando-as membro a membro e simplificando os fatores comuns aos dois membros resulta a fórmula:

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \quad (I)$$

Exemplo:

$$A_5^3 = 5 \times (5-1)(5-2) = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

OBSERVAÇÕES:

- 1.º) O número de arranjos de n objetos com taxa p é igual ao produto de p fatores inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de n .
- 2.º) Se multiplicarmos e dividirmos o segundo membro de (I) pelo produto $(n-p)(n-p-1) \dots 1$, o que não lhe altera o valor, obteremos:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (II)$$

que é uma segunda fórmula, em termos de fatorial.

Exemplo.

$$A_7^4 = \frac{7!}{3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 840$$

3.ª) Se fizermos $p = 0$, na fórmula II, obteremos:

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Dai, a convenção:

$$A_n^0 = 1$$

5. Permutações de objetos distintos. Fórmula. As permutações podem ser consideradas um caso particular dos arranjos em que a taxa é igual ao número de elementos. Assim, o quadro das permutações forma-se como o dos arranjos, até se considerar o último elemento e a fórmula obtém-se, fazendo na fórmula I, $p = n$:

$$P_n = A_n^n = n(n-1) \dots 1 = n! \quad (\text{III})$$

Exemplo:

$$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

OBSERVAÇÃO. A fórmula (III) pode ser escrita

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

Fazendo $n = 1$, vem:

$$P_1 = 1 \times P_0$$

Dai, a convenção:

$$P_0 = 1$$

ou

$$0! = 1$$

6. Inversão. Classe de uma permutação. Chama-se *permutação principal* de n elementos aquela em que os objetos estão colocados na ordem natural.

Assim, se os elementos são representados pelas letras do alfabeto a, b, c, d , por exemplo, a *permutação principal*, será

$abcd$.

Do mesmo modo, se os elementos são diferenciados por índices, por exemplo, a_1, a_2, a_3, a_4 , a *permutação principal* será

$a_1 a_2 a_3 a_4$.

Dois elementos formam uma *inversão* sempre que não estiverem na ordem natural estabelecida na permutação principal. Assim, na permutação de quatro elementos

$cabd$

há *duas inversões*: ca e cb .

Uma permutação diz-se de *classe par* ou *ímpar*, segundo seja par ou ímpar o número de suas inversões.

A permutação $cabd$

é de *classe par* (duas inversões: ca, cb). A permutação $cbad$ é de *classe ímpar* (três inversões: cb, ca, ba).

7. Teorema de Bezout.

Quando se troca a posição de dois elementos, a permutação muda de classe.

Demonstração.

1.ª) Suponhamos que os dois elementos ij , na permutação dada, sejam consecutivos:

$$ab \dots ij \dots kl \quad (1)$$

Trocando os elementos i e j , obteremos a permutação:

$$ab \dots ji \dots kl \quad (2)$$

Se os elementos i, j estavam na ordem natural na permutação (1), formarão inversão na (2) e inversamente. Assim

ao passar da (1) para a (2) a permutação ganha ou perde *uma* inversão e, portanto, muda de classe.

2.ª) Suponhamos que os dois elementos, i, j , na permutação dada não são consecutivos, havendo entre eles h elementos:

$$ab \dots \underbrace{i \dots j}_{h} \dots kl.$$

Trocando j de posição, sucessivamente, com os h precedentes, obteremos a permutação.

$$ab \dots ij \dots kl$$

onde houve h mudanças de classe. Trocando j com i , mais uma mudança, e fazendo, finalmente, i ocupar a posição primitiva de j teremos novas h mudanças de classe. Assim, a permutação

$$ab \dots j \dots i \dots kl$$

terá sofrido $2h + 1$ mudanças de classe. Como este número é *ímpar*, a permutação muda de classe.

8. Permutações simples com objetos repetidos.

a) **Definição e símbolo.** Suponhamos um conjunto de n elementos, sendo α elementos iguais a a . O número de permutações distintas dos n elementos representa-se pelo símbolo P_n^α .

De um modo geral, o símbolo $P_n^{\alpha, \beta, \dots}$ indica o número de permutações distintas de um conjunto de n elementos, sendo α iguais a a , β iguais a b , etc..

b) **Cálculo do número de permutações distintas.** Consideremos α elementos iguais a a e dotemos os mesmos de índices de 1 a α e passemos a considerá-los distintos.

O conjunto será:

$$a_1, a_2 \dots a_\alpha, b, c, d$$

Formemos, então, o quadro das permutações, de modo que, nas colunas, as permutações difiram apenas pela ordem dos elementos com índice. O quadro terá a disposição:

$$\begin{array}{c|c} a_1 a_2 \dots a_\alpha bcd & ba_1 a_2 \dots a_\alpha cd \dots \\ a_1 a_\alpha \dots a_2 bcd & ba_1 a_\alpha \dots a_2 cd \dots \\ a_2 a_1 \dots a_\alpha bcd & ba_2 a_1 \dots a_\alpha cd \dots \end{array}$$

O número de permutações do quadro será $P_n = n!$

O número de permutações de cada coluna será $P_\alpha = \alpha!$

Se dispensarmos os índices, todos os agrupamentos da mesma coluna ficarão iguais; logo, o número de permutações distintas reduzir-se-á ao número de colunas e será:

$$P_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}$$

Se no conjunto houvesse, ainda, β elementos iguais a b , obteríamos, mediante raciocínio análogo:

$$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \beta!}$$

Exemplo:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = 4 \times 5 \times 3 = 60.$$

9. Cálculo do número de combinações simples.*

Temos a propriedade (n.º 2, c, pág. 17):

$$C_n^p \times P_p = A_n^p \therefore C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p}$$

Considerando as fórmulas (I) e (III), podemos, então, concluir:

$$C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \quad (IV)$$

ou, com as fórmulas (II) e (III):

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!} \quad (V)$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Para $p = 1$, temos: $C_n^1 = n$. E, para $p = 0$: $C_n^0 = 1$.

2.ª) Considerando a fórmula (IV), observa-se que o número de combinações é dado por uma fração em que ambos os termos têm p fatores,

* Para formação do quadro das combinações veja o exemplo da pág. 17.

no numerador em ordem decrescente a partir de n e no denominador a partir de p . Estas frações representam-se pelo símbolo $\binom{n}{p}$. Daí, a fórmula das combinações escrever-se, também

$$C_n^p = \binom{n}{p}.$$

O símbolo $\binom{n}{p}$ denomina-se *coeficiente binomial* ou *número binomial*.

Exemplo:
$$C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

10. Propriedades das combinações simples ou dos coeficientes binomiais.

1.ª)

Duas combinações de taxas complementares são iguais.

Duas taxas dizem-se complementares quando sua soma é igual ao número de elementos.

Exemplo:

C_7^3 e C_7^4 têm taxas complementares ($3 + 4 = 7$).

Tese:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Demonstração.

De acôrdo com a fórmula (V), temos:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

e

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! (n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

Donde resulta:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Exemplo:

$$C_{100}^{98} = C_{100}^2 = \frac{100 \times 99}{1 \times 2} = 4.950$$

2.ª)

Dado um conjunto de n elementos, o número de combinações de taxa p em que figuram k elementos determinados ($k \leq p$) é C_{n-k}^{p-k} .

Demonstração.

Destaquemos os k elementos e o conjunto ficará com $n-k$ elementos. Combinemos, então, os elementos restantes com taxa $p-k$. O número dessas combinações será:

$$C_{n-k}^{p-k}$$

Juntando a cada grupo os k elementos destacados, o número de grupos será o mesmo anterior, porém todos conterão os k elementos e a taxa será p . Logo, o número desses últimos agrupamentos será, também,

$$C_n^p$$

Exemplo:

Dados os elementos a, b, c, d, e , o número de combinações com taxa 4 em que figuram a, b , será:

$$C_{5-2}^{4-2} = C_3^2 = C_3^1 = 3$$

3.ª)

Dado um conjunto de n elementos, o número de combinações de taxa p em que não figuram k desses elementos é C_{n-k}^p .

Demonstração.

Destaquemos os k elementos e formaremos um conjunto com $n-k$ elementos. Combinando estes objetos restantes com taxa p , o número de grupos será

$$C_{n-k}^p$$

que não contém, evidentemente, os k elementos destacados

Exemplo:

Dados os elementos a, b, c, d, e , o número de combinações com taxa 2 em que não figuram a e b será:

$$C_{5-2}^2 = C_3^2 = C_3^1 = 3$$

II. Relação de Stifel. Seja um conjunto de n elementos e a , um desses elementos.

O número de combinações com taxa p pode ser decomposto em dois grupos:

- 1.º) combinações em que figura o elemento a ;
- 2.º) combinações em que não figura o elemento a .

De acôrdo com as duas últimas propriedades, no primeiro grupo o número de combinações será:

$$C_{n-1}^{p-1}$$

e no segundo

$$C_{n-1}^p$$

Como a soma dá tôdas as combinações dos n elementos com taxa p , teremos:

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Esta relação é conhecida por *relação de Stifel* e pode ser também escrita:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

12. Resumo. As fórmulas de análise combinatória simples podem ser reunidas no quadro:

Arranjos	$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Permutações	$P_n = 1.2.3 \dots n = n!$	$P_n^{\alpha, \beta} = \frac{n!}{\alpha! \beta!}$
Combinações	$C_n^p = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1.2 \dots p}$	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$

13. Problemas. Em primeiro lugar é necessário fixar qual o tipo de grupamento do problema. Para isto compararemos o número p (objetos de cada grupo) com n (total de objetos). E teremos:

- 1.º) $p = n$: grupamentos do tipo *permutações*.
- 2.º) $p \neq n$ — podem ser *arranjos* ou *combinações*.

Formamos então um grupo (ab) e invertemos a ordem dos elementos (ba) :

- a) Se os dois grupos forem distintos — *arranjos*
- b) Se os dois grupos forem idênticos — *combinações*.

Exemplo:

O diretório acadêmico de uma Faculdade tem cinco membros. Quantas comissões distintas de dois membros poderemos formar?

Resolução.

- 1.º) O número de elementos de um grupo é menor que o total — fica excluído o tipo *permutações*.
- 2.º) Consideremos a comissão: *Presidente, Vice-presidente*.

Invertendo a ordem: *Vice-presidente, presidente*, a comissão é a mesma; logo, os grupamentos são do tipo *combinações*. O número de comissões será, portanto:

$$C_5^2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10 \text{ comissões distintas.}$$

OBSERVAÇÃO. Há problemas cujo enunciado contém uma exigência a ser cumprida e que devem ser tratados atendendo-se a esta particularidade.

Exemplo:

A diretoria de uma sociedade tem dez membros. Quantas comissões de quatro membros podem ser formadas, figurando sempre o presidente e o vice-presidente?

Resolução.

Os grupamentos são do tipo combinações em que figuram sempre dois elementos. O número de comissões será, então, de acôrdo com a 2.ª propriedade:

$$C_{10-2}^{4-2} = C_8^2 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28 \text{ comissões.}$$

EXERCÍCIOS

Calcule:

* 1. A_7^3 2. P_5 3. C_{20}^{16} 4. $\frac{n!}{(n-3)!}$ 5. $\frac{n!}{(n-1)!n}$ 6. $P_{10}^{2,3}$.

Resp.: 210, 120, 4845, $(n-2)(n-1)n$, 1, 302400.

7. De quantos modos diferentes se podem dispôr as letras da palavra *ventura*? *Resp.: 5.040.*

8. Quantos números de cinco algarismos podemos formar com os algarismos ímpares 1, 3, 5, 7, 9? Em quantos dêles os algarismos 1 e 3 ficam juntos? Em quantos aparece o grupo 79? *Resp.: 120, 48, 24.*

9. O número de combinações de m objetos com taxa 2 é 15. Calcular m *Resp.: 6*

10. O número de arranjos de m objetos 3 a 3 é 42m. Calcular m . *Resp.: 8*

11. Calcular m , sabendo-se que o número de combinações de $m+2$ objetos 5 a 5 é igual a $\frac{28}{3}$ de m . *Resp.: 6*

12. Quantas comissões diferentes de três membros poderemos formar com os cinco diretores de uma Sociedade? Em quantas comissões não figura o presidente? Em quantas figuram juntos o presidente e o vice-presidente? *Resp.: 10, 4, 3.*

13. Quantas diagonais tem o icosaágono? *Resp.: $C_{20}^2 - 20 = 170$*

14. Quantas diagonais tem um polígono convexo de 30 lados? *Resp.: 405*

15. Quantas diagonais tem o dodecaedro regular?

Resp.: $C_{20}^2 - 30 - 12(C_5^2 - 5) = 100.$

16. Quantas diagonais tem o octaedro regular? E o icosaedro regular? *Resp.: 3 e 36.*

17. Quantos números diferentes podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, ocupando os algarismos pares os lugares pares? *Resp.: 36.*

18. Obtidos todos os números com as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9, quantos começam pelo algarismo 1? *Resp.: 120.*

19. Obtidos todos os números com as permutações dos algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9 e escritos em ordem de grandeza crescente, que lugar de ordem ocupará o número 537 129? *Resp.: 421.*

20. Achar n na equação: $A_n^3 = 24$. C_{n-2}^2 *Resp.: 4 ou 9.*

21. Quantas permutações distintas das letras da palavra mínima são possíveis? *Resp.: 180.*

22. Quantos números diferentes obteremos permutando os algarismos do número 355.113? *Resp.: 90.*

23. Numa assembléia de 40 cientistas, 8 são físicos. Quantas comissões de 5 membros podem ser formadas incluindo no mínimo um físico?

Resp.: $\frac{40!}{5!35!} - \frac{32!}{5!27!}$ ou 456.632

24. Em uma reunião de sete pessoas há nove cadeiras. De quantos modos se podem sentar as pessoas? (E.T.E.) *Resp.: 181.440.*

25. De quantos modos podemos dispor m mulheres e h homens, em fila, de modo que tanto os homens como as mulheres, entre si, fiquem em ordem de altura? (E.N.E. - 1945) *Resp.: C_{m+h}^m*

26. Dados 20 pontos do espaço, dos quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos? *Resp.: 1.140.*

27. Ordenando de modo crescente as permutações dos algarismos 2, 5, 6, 7, 8, qual o lugar que ocupará a permutação 6 8 2 7 5? *Resp.: 68.*

28. Verificar a igualdade: $A_{n+1}^p = A_n^p + p \cdot A_n^{p-1}$.

29. Calcular n e p no sistema: $C_n^p = 78$ e $A_n^p = 156$. *Resp.: 13 e 2.*

30. São dados 15 pontos no espaço, sendo 7 coplanares. Quantos são os planos definidos pelos 15 pontos? *Resp.: 421.*

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO

31. Das permutações de 5 objetos são de classe ímpar permutações (E.N.E. - 1958).

32. Calcule A_m^3 , sabendo que $C_m^3 = 84$ (E.P.U.C. - 1958) *Resp.: 504.*

33. Calcule o número de combinações simples das letras a, b, c, d, e , tomadas 4 a 4, nas quais as letras b e c figuram sempre juntas (E.N.E. - 1958) *Resp.*: 3 (veja pág. 25).
34. Com uma letra m , uma letra d e um certo número de letras a , podemos formar 20 permutações. Calcule o número de letras a . (E. Flum. E - 58) *Resp.*: 3.
35. Numa classe existem 6 rapazes e 4 moças. De quantas maneiras podemos reuni-los em grupos de 6 compostos de 4 rapazes e 2 moças? (E. Arq. U. M. Gerais - 1951) *Resp.*: 90.
36. Em um saco há 4 bolas brancas e 6 pretas. *a)* De quantos modos poderemos extrair 5 bolas, sendo 2 brancas e 3 pretas? *b)* De quantos modos poderemos retirar 5 bolas, sendo tôdas pretas? (E. T. Ex. - 1946) *Resp.*: 120 e 6.
37. Quantos números diferentes de dez algarismos, se podem formar com os algarismos 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, tendo todos êles o mesmo final 34 475? (E. T. Ex. - 1948) *Resp.*: 30.
38. Sendo $C_{10}^{p-3} = C_{10}^{p+3}$, calcule p . (E.N.E. 59) *Resp.*: 5.
39. Calcule m , de modo que :
- $$\frac{m! + (m-1)!}{(m+1)! - m!} = \frac{6}{25} \quad \text{Resp.: 5 (E.F.E. 60).}$$
40. Calcule m , sabendo que :
- $$C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 1.023 \quad (\text{EPUC} - 60).$$
- Resp.*: 10.
41. Quantos números existem de 7 algarismos significativos, tais que os algarismos 4 e 8 apareçam, sempre, duas e três vêzes, respectivamente, em cada número? (E.F.E. - 955) *Resp.*: 8.820.

UNIDADE II

BINÔMIO DE NEWTON

1. Produto de binômios distintos. Suponhamos o produto

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + k)$$

de n binômios distintos.

Cada termo do resultado será o produto de n fatores, tomados *um* em cada binômio.

Os termos do produto serão portanto :

- 1.º Escolhendo a letra x em todos os binômios obteremos o termo x^n , que é o de maior grau do produto.
- 2.º Escolhendo a letra x em $n-1$ binômios e a segunda letra ($a, b, c \dots k$) no binômio restante, obteremos os termos do produto da forma :

$$ax^{n-1}, bx^{n-1}, cx^{n-1} \dots kx^{n-1}.$$

Assim, o coeficiente de x^{n-1} no resultado será a soma

$$a + b + c + \dots + k$$

que representaremos por S_1 .

- 3.º Os termos em x^{n-2} serão obtidos escolhendo a letra x em $n-2$ binômios e duas das letras $a, b, c \dots k$, nos dois binômios restantes. Este termo será pois :

$$(ab + ac + \dots + bc + bd \dots) x^{n-2}$$

que representaremos por $S_2 x^{n-2}$, onde S_2 é, portanto, a soma dos produtos das letras $a, b, c, \dots k$, tomadas duas a duas (combinações de taxa 2).

- 4.º) De um modo geral, os termos em x^{n-p} serão formados tomando a letra x em $n-p$ binômios e p das letras $a, b, \dots k$ nos p binômios restantes. Assim, o coeficiente de x^{n-p} será a soma dos produtos daquelas letras tomadas p a p (combinações de taxa p dos n elementos), que representaremos por S_p .
- 5.º) O último termo do resultado é $abc \dots k$, que representaremos por S_n .

Assim podemos escrever o resultado:

$$(x+a)(x+b)\dots(x+k) = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + S_p x^{n-p} + \dots + S_n \quad (\text{I})$$

Exemplo.

Achar o produto dos binômios $(x+1)(x-2)(x+3)(x+4)$.

Temos:

$$S_1 = 1 - 2 + 3 + 4 = 6$$

$$S_2 = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 3.$$

$$S_3 = 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \cdot 4 = -26$$

$$S_4 = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 4 = -24$$

$$\text{Logo: } (x+1)(x-2)(x+3)(x+4) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24$$

2. **Binômio de Newton.** Se, na fórmula (I), fizermos:

$$a = b = c = \dots = k$$

o produto dos fatores binômios toma a forma:

$$(x+a)^n$$

Resta achar as somas $S_1, S_2, \dots, S_p$, do segundo membro, na hipótese considerada.

As parcelas de S_1 ficarão todas iguais a a , as de S_2 iguais a a^2 e assim por diante, as parcelas de S_p serão iguais a a^p .

O número de parcelas de S_1 é n (combinações das n letras $a, b, \dots k$, tomadas uma a uma); o número de parcelas

de S_2 será C_n^2 (as letras $a, b, c, \dots k$ foram combinadas duas a duas) e assim por diante, em S_p , o número de parcelas será C_n^p . Assim, teremos:

$$S_1 = C_n^1 a; \quad S_2 = C_n^2 a^2, \dots S_p = C_n^p a^p$$

Substituindo na fórmula (I):

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^p a^p x^{n-p} + \dots + a^n \quad (\text{II})$$

A esta fórmula que fornece a **potência de um binômio**, dá-se o nome de *binômio de Newton*, embora seja devida ao matemático italiano Tartaglia, cabendo a Newton sua generalização, para expoentes não positivos ou não inteiros.

Exemplo.

$$\begin{aligned} (x+a)^5 &= x^5 + C_5^1 a x^4 + C_5^2 a^2 x^3 + C_5^3 a^3 x^2 + C_5^4 a^4 x + a^5 \\ &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. Podemos observar que o desenvolvimento do Binômio de Newton é um polinômio homogêneo de grau n em que os expoentes do primeiro termo diminuem e os do segundo aumentam de uma unidade. O desenvolvimento tem $n+1$ termos.

3. **Térmo geral.** Chama-se *térmo geral* a expressão ou fórmula que permite achar um termo qualquer do desenvolvimento, desde que seja dada sua **ordem**.

Observando a fórmula II do desenvolvimento, verifica-se que o termo com p precedentes, isto é, o termo de ordem $p+1$, que representaremos por T_{p+1} , será:

$$T_{p+1} = C_n^p a^p x^{n-p} \quad (\text{III})$$

Exemplo.

Achar o 5.º termo do desenvolvimento de $(x+2)^{10}$

O 5.º termo tem 4 precedentes ($p=4$); logo, vem:

$$T_{4+1} = C_{10}^4 2^4 x^{10-4}$$

ou

$$T_5 = 210 \times 16 x^6 = 3.360x^6$$

4. Propriedades do binômio de Newton.

PRIMEIRA.

Os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais.

O coeficiente do termo que tem p precedentes é C_n^p

O equidistante do extremo terá p consequentes. Logo, o número de seus precedentes será o total de termos, $n+1$, menos os consequentes e éle próprio, isto é: $n+1-p-1 = n-p$ e seu coeficiente será C_n^{n-p} .

Como C_n^p e C_n^{n-p} são iguais por terem taxas complementares, o teorema fica demonstrado.

Aplicação.

Dessa propriedade resulta ser suficiente calcular os termos até a metade, se n for ímpar e até a metade por excesso, se n for par.

SEGUNDA. Lei de recorrência de formação dos termos.

De acôrdo com a fórmula do termo geral, temos:

$$T_{p+1} = C_n^p a^p x^{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} a^p x^{n-p}$$

e seu precedente será:

$$T_p = C_n^{p-1} a^{p-1} x^{n-p+1} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} a^{p-1} x^{n-p+1}$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{n-p+1}{p} ax^{-1}$$

donde:

$$T_{p+1} = T_p \times \frac{n-p+1}{p} ax^{-1} \quad (\text{IV})$$

Conclui-se a propriedade:

Para passar de um termo ao seguinte multiplica-se o coeficiente pelo expoente de x e divide-se pelo expoente de a aumentado de 1. Em seguida, aumenta-se o expoente de a e diminui-se o de x de uma unidade.

Aplicações.

1.ª) Para obter o desenvolvimento de um binômio pode-se aplicar a segunda propriedade até o termo médio e obter os seguintes pela primeira propriedade.

Exemplo.

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + \frac{6 \times 5}{2} a^2 x^4 + \frac{6 \times 5 \times 4}{3} a^3 x^3 + 15a^4 x^2 + 6a^5 x + a^6$$

2.ª) Determinar o termo de coeficiente binomial máximo.

De acôrdo com a fórmula (IV), os coeficientes serão crescentes enquanto tivermos:

$$\frac{n-p+1}{p} > 1$$

$$p < \frac{n+1}{2}$$

Exemplo.

Os termos de $(x+a)^8$ serão crescentes enquanto tivermos:

$$p < \frac{8+1}{2} \quad \text{ou} \quad p < 4 \frac{1}{2}$$

Logo, o termo de coeficiente máximo corresponderá a $p=4$ e será:

$$T_5 = C_8^4 a^4 x^4 = 70 a^4 x^4$$

3.ª) Achar o termo independente de x no desenvolvimento

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$$

Pela fórmula do termo geral (III) temos:

$$T_{p+1} = C_{12}^p \left(-\frac{1}{x}\right)^p (x^2)^{12-p} = C_{12}^p (-1)^p x^{24-3p} \quad (1)$$

Para que o termo seja independente de x , devemos ter:

$$24-3p = 0 \quad \therefore \quad p = 8.$$

Substituindo o valor de p em (1), temos o termo pedido que será o nono:

$$T_9 = C_{12}^8 \times (-1)^8 = 495$$

4.ª) Determinar o maior termo no desenvolvimento de

$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)^{10} \quad (\text{CECIL THIRÉ-Ex. de Álgebra}).$$

Resolução.

Temos de acordo com a fórmula (IV)

$$T_{p+1} = T_p \times \frac{10-p+1}{p} \times 1^{-1} \times \frac{2}{3} = T_p \times \frac{22-2p}{3p} \quad (I)$$

Assim, para passar de um termo ao seguinte, o multiplicador é a fração

$$\frac{22-2p}{3p}$$

Logo, os termos crescerão enquanto tivermos:

$$\frac{22-2p}{3p} > 1 \quad \therefore \quad p < \frac{22}{5}$$

O maior número inteiro abaixo de $22/5$ é 4. Substituindo p por 4 na igualdade (1), teremos, então, o termo máximo:

$$T_{p+1} = T_{4+1} = T_5$$

Em virtude da fórmula do termo geral, vem:

$$T_5 = C_{10}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 41 \frac{13}{27}$$

5. Triângulo de Pascal.

A relação de Stifel: $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$, pode aplicar-se para formar os coeficientes das potências sucessivas de um binômio com o dispositivo prático denominado *triângulo aritmético de Pascal*. Na primeira coluna escreve-se o número um e cada elemento de uma linha de coeficientes é obtido adicionando o número que lhe fica em cima com o precedente:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 1 \ 1 \\ 2 & 1 \ 2 \ 1 \\ 3 & 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 4 & 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ & \dots \end{array}$$

Exemplo.

Os coeficientes da quarta potência de um binômio são 1, 4, 6, 4, 1

6. Resumo.

$$\begin{aligned} (x+a)(x+b)\dots(x+k) &= x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + S_p x^{n-p} + \dots + S_n \\ (x+a)^n &= x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^p a^p x^{n-p} + \dots + a^n \\ T_{p+1} &= C_n^p a^p x^{n-p} \\ T_{p+1} &= T_p \times \frac{n-p+1}{p} a x^{-1} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Calcule os resultados, utilizando a lei de formação do produto:

1. $(x+2)(x-3)(x+4)$ 2. $(x+1)(x-4)(x+5)(x-1)$
3. $(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$. Resp.: $x^3+3x^2-10x-24$; $x^4+x^3-21x^2-x+20$; x^4-13x^2+36 .
4. Escreva o *terceiro* termo do produto $(x+5)(x+2)(x-3)(x+6)$, sem efetuá-lo. Resp.: $13x^2$.
5. Escreva o *quarto* termo do produto $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, sem efetuá-lo. Resp.: $-154x$.

Calcular o desenvolvimento das potências:

6. $(x-3)^5$ 7. $(1+2x)^3$ 8. $(3x+1)^4$ 9. $(1-2x)^4$

10. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6$ 11. $(x - \sqrt{3})^6$ 12. $(x + 2\sqrt{y})^3$ 13. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$
 Resp.: 6) $x^6 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; 7) $1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$
 8. $81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$; 9) $1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4$;
 10. $485 + 198\sqrt{6}$; 11) $x^4 - 5\sqrt{3}x^4 + 30x^3 - 30\sqrt{3}x^2 + 45x - 9\sqrt{3}$;
 12. $x^3 + 6x^2\sqrt{y} + 12xy + 8y\sqrt{y}$; 13) $x^4 - 4x^2 + 6 - 4x^{-2} + x^{-4}$.
 14. Calcular o quinto termo de $(2x-1)^{11}$ Resp.: $42.240x^7$.
 15. Achar o sétimo termo de $(x+2\sqrt{y})^{15}$ Resp.: $320.320x^9y^3$.
 16. Achar o termo médio de $(x^2-2x)^8$ Resp.: $1.120x^{12}$.
 17. Calcular o termo em x^8 no desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$
 Resp.: $210x^8$.
 18. Calcular o termo em x^5 no desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^8$
 Resp.: $16x^4$.
 19. Calcular o termo independente de x da potência $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{x}\right)^9$
 Resp.: 2.268.
 20. Calcular o termo independente de x na potência $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$
 Resp.: 20.
 21. Achar n para que os coeficientes dos 2.º, 3.º e 4.º termos da potência $(x+a)^n$ fiquem em progressão aritmética. Resp.: $n=7$.
 22. Provar que a soma dos coeficientes de $(x+a)^n$ é 2^n .
 23. Achar a soma dos coeficientes de $(x+a)^7$. Resp.: 128.
 24. Achar a soma dos coeficientes de $(x^2+2x)^{10}$. Resp.: 3^{10} .
 25. Achar a soma dos quadrados dos 8 primeiros números naturais.
 Resp.: 204.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO

26. Calcule o termo independente de x em $\left(\frac{1}{x^2} - \sqrt[4]{x}\right)^{18}$
 (E.N.E. - 1958). Resp.: 153.
 27. Complete: $(x+a)^m = \sum_{p=0}^m \dots$ (E.P.U.C. - Rio 1958).
 Resp.: $\sum_{p=0}^m C_m^p a^p x^{m-p}$
 28. Calcule a soma dos coeficientes de $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^6$. (E.P.U.C. - Rio
 - 1958). Resp.: $244\frac{9}{64}$.

29. Calcule o termo médio de $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^6$ (E.P.U.C. - Rio 1960)
 Resp.: - 20
 30. Calcule o termo independente de x em $\left(\frac{1}{x} - \sqrt[4]{x}\right)^{15}$
 (E.N. Quím. - 1952) Resp.: 455
 31. Determine o valor do termo independente de x no desenvolvimento
 $\left(2x - \frac{4}{x^3}\right)^8$, sem efetuar o desenvolvimento. (E.N. Quím. - 1949).
 Resp.: 28.672.
 32. Calcular diretamente o 7.º termo de $\left(2x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^9$ (E. N. Arq. -
 1941). Resp.: $84x^3$.
 33. Calcule, diretamente, o termo de ordem p do desenvolvimento
 $(x^2 - \sqrt{y})^m$, ordenado segundo as potências decrescentes de x , sendo
 p o primeiro termo e m o segundo termo de uma progressão aritmética,
 cuja soma dos k primeiros termos é $2k^2 + 3k$, qualquer que
 seja o valor de k . (E.N.E. - 1947) Resp.: $126x^{10}y^2$.
 34. O coeficiente do 98º termo de $(x-y)^{100}$ é igual a
 (F.E.U. Rio de Janeiro - 1961).
 35. Sabendo que a soma dos coeficientes de $(a+b)^m$ é 256, calcule o
 número de permutações de $m/2$ elementos. (E.F.E. - 58) Resp.: 24.
 36. No desenvolvimento de $(a+b)^{20}$, a razão do coeficiente de certo
 termo para o seguinte é $5/16$. Calcule a ordem do segundo desses
 dois termos. (E.F.E. - 1960) Resp.: 6º.
 37. Calcule m sabendo que a soma dos coeficientes dos termos de ordem
 ímpar do desenvolvimento de $(x+a)^m$ é 128. (E.F.E. - 960)
 Resp.: $m = 8$.
 38. Sendo 1 024 a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x+1)^m$,
 calcule m . (E.F.E. - 1959). Resp.: $m = 5$.
 39. Calcule o termo em x^3 no desenvolvimento $\left(\sqrt{x} - \frac{a^2}{x}\right)^{15}$
 (E. Flum. Eng. - 1959). Resp.: $-455a^6x^3$.
 40. No desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$, onde n é inteiro e posi-
 tivo, existirá um termo que não depende de x ? (ITA - 1959).
 Resp.: Não.

UNIDADE III

DETERMINANTES. SISTEMAS LINEARES

I — DETERMINANTES

1. **Definições.** **MATRIZ.** Dados m n elementos chama-se *matriz* ao quadro formado com êsses elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Para indicar a matriz colocam-se os elementos dispostos em linhas e colunas entre dois pares de barras verticais; assim

$$\left| \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right|$$

é uma matriz de doze elementos onde as 4 colunas são indicadas pelas letras do alfabeto e as 3 linhas, por índices numéricos.

MATRIZ QUADRADA. No caso particular em que m e n são iguais, a disposição denomina-se *matriz quadrada*.

Exemplo :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|$$

ORDEM. Chama-se *ordem de uma matriz quadrada* o número de linhas ou colunas. Assim, o exemplo anterior é uma matriz quadrada de *terceira ordem*.

DIAGONAIS. Os elementos a_1 b_2 c_3 da matriz quadrada formam a diagonal chamada *principal*. É uma permutação de primeira classe.

A segunda diagonal c_1 b_2 a_3 ou a_3 b_2 c_1 é denominada diagonal *secundária*. É uma permutação de segunda classe.

DETERMINANTES. *Determinante de uma matriz quadrada* de ordem n , é a soma dos produtos distintos dos *elementos da matriz*, tomados n a n , e de modo que *em cada produto* figure *um único elemento* de cada linha e de cada coluna e tendo cada produto o sinal $+$ ou $-$, segundo a permutação dos indicadores das linhas ou colunas seja de primeira ou segunda classe (pág. 20, § 6). Os produtos precedidos do sinal $+$ chamam-se *aditivos* e os precedidos do sinal $-$, *subtrativos*.

Exemplos.

1.º) Suponhamos a matriz de segunda ordem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Os únicos produtos nas condições definidas são a_1 b_2 e b_1 a_2 . Considerando os sinais correspondentes às permutações, temos o *determinante*:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

OBSERVAÇÃO. Os produtos que entram na formação do determinante, podem ser obtidos da diagonal principal, permutando as letras e fixando os índices ou, inversamente, fixando as letras e permutando os índices. O produto dos elementos da diagonal principal chama-se *térmo principal*, e é sempre aditivo.

2.º) Seja a matriz de terceira ordem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Fixando os índices e permutando as letras da diagonal principal obtemos os seis produtos da definição

$$a_1 b_2 c_3, a_1 c_2 b_3, b_1 a_2 c_3, b_1 c_2 a_3, c_1 a_2 b_3, c_1 b_2 a_3$$

Considerando a classe de cada permutação, antepomos o sinal correspondente e obteremos o determinante da matriz, que representaremos por Δ :

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

2. Notação. O determinante representa-se de vários modos:

a) escrevendo a própria matriz entre duas barras verticais.

Suponhamos Δ o valor do determinante; teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

b) indicando a soma de termos derivados do principal:

$$\Delta = \Sigma a_1 b_2$$

c) escrevendo o termo principal entre duas barras:

$$\Delta = | a_1 b_2 |$$

3. Cálculo dos determinantes de segunda ordem. O cálculo de um determinante por intermédio apenas da definição, é muito penoso. Todavia, para a segunda ordem, o cálculo é imediato, pois só há dois produtos, que são os correspondentes aos elementos das duas diagonais (*diagonal principal menos diagonal secundária*).

Exemplo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - 4 \times (-5) = 36.$$

4. Cálculo do Determinante de terceira ordem.
Regra de Sarrus. Seja calcular:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Os termos podem ser obtidos por intermédio do dispositivo denominado *Regra Prática de Sarrus*. Consiste em repetir as duas primeiras linhas e formar os produtos pelas transversais que abranjam três elementos. As transversais paralelas à diagonal principal fornecem produtos, cujo sinal deve ser mantido (termos aditivos), e, as paralelas à secundária, produtos cujo sinal deve ser trocado (termos subtrativos).

Temos, então :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 36 - 40 + 18 + 6 = 43$$

5. Propriedades Fundamentais.

- 1.ª) Se trocarmos as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas, na mesma ordem, o determinante não se altera.

Realmente, os elementos da diagonal principal têm a mesma ordem de linha e de coluna; logo, pela troca assina-

lada, ficarão na mesma posição. Assim, o termo principal não se altera e, conseqüentemente, não se altera o determinante, cujos termos são todos derivados do principal.

Aplicação.

Dessa propriedade resulta que, qualquer teorema demonstrado para as colunas pode ser aplicado às linhas e reciprocamente. Daí enunciarmos as propriedades de modo geral para as *filas paralelas*.

- 2.ª) O determinante que tem todos os elementos de uma fila iguais a zero, é nulo.

Por definição, em todos os termos figura um elemento de cada fila. Dêse modo, todos os termos terão o fator zero e o determinante será nulo.

- 3.ª) Se trocarmos de posição duas filas paralelas, sem alterar a ordem dos elementos, o determinante troca de sinal, mantendo o valor absoluto.

Consideremos, de modo geral, os determinantes de ordem n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & f_1 & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i & b_i & \dots & f_i & \dots & k_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & f_n & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & k_1 & \dots & f_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i & b_i & \dots & k_i & \dots & f_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & k_n & \dots & f_n & \dots & n_n \end{vmatrix}$$

onde estão trocadas as colunas f e k .

Suponhamos um termo qualquer de Δ , seja

$$t = a_i b_j \dots f_k \dots n_n$$

Este termo, salvo o sinal, é, também, de Δ' , pois tem um elemento de cada linha e de cada coluna dêste último.

Assim, todo termo do determinante Δ , salvo o sinal, é um termo de Δ' e reciprocamente.

No termo t , considerado em Δ , f k é a ordem natural, mas, considerado em Δ' , esta ordem é uma inversão; consequentemente se t é positivo em Δ será negativo em Δ' e vice-versa.

Assim, Δ e Δ' têm os termos do mesmo módulo e de sinais opostos, concluindo-se:

$$\Delta = - \Delta'.$$

4.ª)

O determinante que tem duas filas paralelas iguais, é nulo.

Se trocarmos as filas iguais o determinante obtido é o mesmo. Mas, em virtude do teorema anterior, trocará de sinal. Logo, resulta:

$$\Delta = - \Delta \quad \therefore \quad 2 \Delta = 0 \text{ e } \Delta = 0.$$

Aplicação.

Um elemento pode ocupar qualquer posição no determinante, mediante trocas sucessivas de sua linha e coluna com as linhas e colunas precedentes ou conseqüentes. A cada uma dessas trocas corresponde uma mudança de sinal.

Exemplo.

Passando o elemento 5, para primeiro lugar, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Determinante menor. Adjunto. Chama-se *determinante menor* de Δ ou, apenas, menor de Δ relativo a um elemento, o determinante que se obtém, suprimindo em Δ , a linha e a coluna que se cruzam no elemento considerado.

Suprimindo a coluna k e a linha i , o menor obtido denomina-se *menor* do elemento k_{i1} , comum à linha e coluna suprimidas.

O menor do elemento 7 no determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \delta' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Adjunto ou complemento algébrico de um elemento é o menor desse elemento a que se atribui um sinal dado pela *potência de -1, cujo expoente é a soma dos números que indicam a linha e a coluna do elemento*.

Representa-se pelo símbolo A_{ki} , sendo k a linha e i a coluna, ou K_i .

O adjunto do elemento 7 no mesmo determinante anterior, será:

$$A_{34} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 0 = 0.$$

7. Desenvolvimento pelos elementos de uma fila.

1.º TEOREMA. Quando os elementos de uma fila são nulos exceto um, o determinante é igual ao produto do elemento não nulo pelo respectivo adjunto.

1.º CASO: A fila de elementos nulos exceto um é a primeira e o elemento não nulo o primeiro.

Seja o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots n_n \end{vmatrix}$$

Por definição, todos os termos contêm um elemento de primeira linha; logo, se não fôr o primeiro, o termo é nulo.

Assim, o determinante reduz-se aos termos que contêm a_1 ; e, como esses termos não conterão nenhum outro elemento da primeira linha ou coluna, conclui-se que, se colocarmos a_1 em evidência, o outro fator será formado com elementos do quadro:

$$\delta' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \dots & n_2 \\ b_3 & c_3 & & n_3 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_n & c_n & & n_n \end{vmatrix}$$

Ora, este quadro é, em valor absoluto e sinal, o adjunto de a_1 , pois $A_{11} = (-1)^{1+1} \delta' = \delta'$; logo, temos: $\Delta = A_{11} a_1$ ou, com a segunda notação:

$$\Delta = A_1 a_1.$$

2.º CASO: A fila de elementos nulos exceto um é uma qualquer.

Suponhamos nula a linha de ordem i e k_i o elemento não nulo.

Isto é:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & k_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & k_i & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix}.$$

De acôrdo com a 3.ª propriedade podemos colocar o elemento k_i em primeiro lugar, à custa de $k-1$ trocas sucessivas de colunas e, em seguida, $i-1$, troca de linhas. Assim, o determinante ficará multiplicado por $(-1)^{k+i-2}$ ou $(-1)^{k+i}$, o que é o mesmo, pois $k+i-2$ e $k+i$ são da mesma paridade. Podemos, então, escrever:

$$\Delta = (-1)^{k+i} \begin{vmatrix} k_i & o & o & \dots & o \\ k_1 & a_1 & b_1 & \dots & n_1 \\ k_2 & a_2 & b_2 & \dots & n_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n & a_n & b_n & \dots & n_n \end{vmatrix}$$

Donde, em virtude do caso anterior:

$$\Delta = (-1)^{k+i} K_i \times k_i.$$

Como $(-1)^{k+i} K_i$ é, em valor absoluto e sinal, o adjunto de k_i , o teorema fica demonstrado.

2.º TEOREMA (Laplace). O determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos adjuntos.

Seja o determinante geral de ordem n (I da página 45) que terá $n!$ termos, correspondentes às permutações dos n elementos da diagonal principal.

Em cada termo figurará um elemento e um único dos elementos da linha i . Assim, haverá $\frac{n!}{n}$ ou $(n-1)!$ termos com a_i , o mesmo número de termos em b_i , etc.

Se colocarmos $a_i, b_i, \dots, k_i$ em evidência nos termos em que figuram, teremos, representando por $C_1, C_2, \dots, C_n$ os coeficientes:

$$\Delta = C_1 a_i + C_2 b_i + \dots + C_k k_i + \dots + C_n n_i.$$

Resta, então, provar que os coeficientes C são os adjuntos dos elementos da linha i . Para isso, suponhamos nulos os elementos dessa fila, exceto k_i teremos então:

$$\Delta = C_k \cdot k_i$$

De acôrdo com o teorema anterior: $\Delta = (-1)^{k+i} K_i k_i$

Logo: $(-1)^{k+i} K_i \cdot k_i = C_k \cdot k_i$

donde $C_k = (-1)^{k+i} K_i$

Isto é, o coeficiente de k_i é seu respectivo adjunto, o que demonstra o teorema.

OBSERVAÇÃO. O mesmo determinante tem $2n$ representações distintas, pois é indiferente a fila que se considera para desenvolvê-lo. Realmente, considerando os elementos pelas colunas, teremos:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n$$

$$\Delta = B_1 b_1 + B_2 b_2 + \dots + B_n b_n$$

e assim por diante, onde, de modo geral, A_i é o adjunto de a_i .

8. Consequências do teorema de Laplace.

Primeira consequência. Cálculo de um determinante.

Pelo teorema de Laplace pode-se calcular um determinante qualquer, desenvolvendo, sucessivamente, em determinante de ordem imediatamente inferior, até atingirmos a 3.ª ordem, onde aplicaremos a regra de Sarrus.

Exemplo.

$$\text{Calcular o determinante: } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo, segundo os elementos da 4.ª coluna, temos:

$$\Delta = -1 \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -1 \times 40 + 4 \times 0 - 3 \times (-40) + 1 \times 0 = 80.$$

OBSERVAÇÃO. O cálculo do determinante pelo desenvolvimento não é rápido, salvo casos particulares como o do exemplo, em que dois menores se anulam. Para a 5.ª ordem, por exemplo, teremos, em geral, de calcular vinte de 3.ª; pois obteremos cinco de 4.ª e cada um destes dará quatro de 3.ª.

Segunda consequência.

Multiplicando-se ou dividindo-se os elementos de uma fila por um número, o determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.

Suponhamos o determinante I da página 45, desenvolvido segundo os elementos da primeira coluna:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_i a_i + \dots + A_n a_n.$$

Se multiplicarmos os elementos da coluna considerada pela constante h , teremos:

$$\Delta' = A_1 a_1 h + A_2 a_2 h + \dots + A_i a_i h + \dots + A_n a_n h$$

$$\Delta' = h (A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_i a_i + \dots + A_n a_n)$$

donde

$$\Delta' = h \Delta.$$

OBSERVAÇÃO. Análogamente demonstraremos a propriedade para a divisão que corresponde a multiplicar por $1/h$ (sendo $h \neq 0$).

Aplicações da segunda consequência.

1.ª) **Simplificação:** Seja $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$

Os elementos da primeira linha são divisíveis por 2. Se os dividirmos por 2, o determinante ficará dividido por 2; logo, temos, fazendo a compensação:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

O determinante resultante, com elementos de menor valor absoluto, diz-se *simplificado*.

2.ª) Transformar em números inteiros os elementos de um determinante.

Seja o determinante com elementos fracionários:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2/3 & 3/4 & 5/8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

O m.m.c. dos denominadores da segunda linha é 24. Se multiplicarmos essa linha por 24, todos os denominadores serão simplificados. Mas, neste caso, o determinante fica multiplicado por 24; fazendo a compensação, teremos:

$$\Delta = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 16 & 18 & 15 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3.ª) Tornar iguais os elementos de uma fila.

Seja o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

cujos elementos da primeira linha tornaremos iguais. A transformação é análoga à redução de frações ao mesmo denominador. O m.m.c. dos elementos é 6 e os quocientes das divisões pelos elementos da linha são 3, 6 e 2. Multipliquemos, então, a primeira coluna por 3, a segunda por 6 e a terceira por 2. O determinante ficará multiplicado por $3 \times 6 \times 2$; fazendo a compensação, teremos:

$$\Delta = \frac{1}{3 \times 6 \times 2} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 12 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

4.ª) Tornar iguais à unidade os elementos de uma fila.

Considerando a transformação anterior, se dividirmos a primeira linha por 6, obteremos, feita a compensação:

$$\Delta = \frac{6}{3 \times 6 \times 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \\ 12 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

Terceira consequência.

É nulo o determinante que tem duas filas paralelas proporcionais.

Seja o determinante (I) da página 45 no qual vamos supor proporcionais as duas primeiras colunas. Isto é:

$$b_1 = a_1 h; \quad b_2 = a_2 h; \quad \dots \quad b_n = a_n h.$$

Dê-se modo teremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 h & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i & a_i h & \dots & k_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n h & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix} = h \times \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i & a_i & \dots & k_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix} = h \times 0 = 0,$$

porque o determinante ficou com duas colunas iguais.

OBSERVAÇÃO. Observemos que há três casos em que se pode afirmar a nulidade de um determinante, por simples inspeção:

- a) quando todos os elementos de uma fila forem nulos;
- b) quando tiver duas filas paralelas iguais;
- c) quando tiver duas filas paralelas proporcionais.

Quarta consequência.

É nula a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos adjuntos dos elementos correspondentes de uma fila paralela. (CAUCHY).

Seja o determinante (I) (pag. 45), desenvolvido pela primeira coluna; teremos:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_i a_i + \dots + A_n a_n \quad (1)$$

Se multiplicarmos os elementos da coluna b pelos adjuntos da coluna a , teremos:

$$\Delta' = A_1 b_1 + A_2 b_2 + \dots + A_i b_i + \dots + A_n b_n,$$

o que corresponde a substituir em (I) a coluna a pela coluna b . Mas, neste caso, o determinante (1) ficará com duas colunas iguais; logo:

$$\Delta' = 0.$$

Quinta consequência.

(TEOREMA DA ADIÇÃO DE FILAS). Se, num determinante, os elementos de uma fila são somas de m parcelas, êle pode ser transformado na soma de m determinantes, os quais se obtêm do determinante dado, tomando, no lugar da fila composta, as primeiras, segundas etc parcelas e conservando tôdas as demais filas.

Seja o determinante Δ , onde vamos supor:

$$a_1 = m_1 + p_1; a_2 = m_2 + p_2 \dots \dots a_i = m_i + p_i$$

Pelo teorema de Laplace, teremos:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_i a_i + \dots A_n a_n$$

ou, substituindo os elementos da coluna a , de acôrdo com a hipótese:

$$\Delta = A_1 (m_1 + p_1) + A_2 (m_2 + p_2) + \dots + A_i (m_i + p_i) + \dots + A_n (m_n + p_n),$$

$$\Delta = (A_1 m_1 + A_2 m_2 + \dots A_i m_i + \dots A_n m_n) + (A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots A_i p_i + \dots + A_n p_n),$$

por serem A_1, A_2 , etc. os adjuntos dos elementos da primeira coluna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_i & b_i & \dots & k_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_n & b_n & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & \dots & k_1 & \dots & n_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_i & b_i & \dots & k_i & \dots & n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & b_n & \dots & k_n & \dots & n_n \end{vmatrix}$$

Sexta consequência.

TEOREMA DE JACOBI: Um determinante não se altera quando se substitui uma fila por sua soma com combinações lineares de filas paralelas.

Seja o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Substituindo a primeira coluna pela soma com a segunda multiplicada pela constante k , teremos, pelo teorema da adição de filas:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 \cdot k & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 \cdot k & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 \cdot k & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \cdot k & b_1 & c_1 \\ b_2 \cdot k & b_2 & c_2 \\ b_3 \cdot k & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Como a segunda parcela é nula, por ter duas colunas proporcionais, a propriedade fica demonstrada.

Aplicações do Teorema de Jacobi.

1.ª) Abaixamento da ordem de um determinante.

Pode-se abaixar a ordem de um determinante sem lhe alterar o valor, transformando-o, por intermédio do teorema de Jacobi, de modo a obter uma fila com todos os elementos nulos, exceto um; pois, neste caso, será o produto do elemento não nulo pelo adjunto, que é de ordem imediatamente inferior.

Exemplo.

Seja o determinante seguinte, onde multiplicamos a primeira linha por 3 e as duas outras por 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} (3 \\ (2 \\ (2 \end{matrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 10 & 6 & 4 \\ -4 & -6 & 10 \end{vmatrix}$$

Conservando a terceira linha e adicionando-a com cada uma das duas primeiras, obteremos o determinante equivalente (teorema de Jacobi):

$$\Delta = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 22 \\ 6 & 0 & 14 \\ -4 & -6 & 10 \end{vmatrix}$$

Como, na segunda coluna, o único elemento diferente de zero é -6, vem, finalmente, o determinante de ordem imediatamente inferior:

$$\Delta = \frac{1}{12} (-6) (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$$

OBSERVAÇÃO. O cálculo simplifica-se quando existe, ou pode ser facilmente obtido, um elemento igual a 1, como no exemplo da aplicação seguinte.

2.ª) Cálculo de um determinante.

O teorema de Jacobi aplica-se com vantagem ao cálculo de determinantes de ordem elevada, abaixando sucessivamente a ordem até a segunda, como vimos na aplicação anterior.

Exemplo.

Calcular

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Fixemos a terceira coluna e, multiplicando-a por 2 e por 1, somemos os produtos, respectivamente, à primeira e à quarta. O determinante não se altera, logo vem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 2 \end{vmatrix}$$

Aproveitemos o elemento 1 da primeira coluna e, multiplicando-a por 3 e 2, somemos, respectivamente, com as duas últimas:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 8 \\ 7 & 14 & 16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} = - (160 - 112) = - 48.$$

3.ª) Regra prática de Chió.

A aplicação do teorema de Jacobi pode ser muito abreviada, utilizando-se a regra prática de Chió (só é útil quando se tem o elemento 1):

- 1.ª) Suprime-se a linha e a coluna que se cruzam em $k_i = 1$, cuja classe dá sinal ao determinante.
- 2.ª) Subtrai-se de cada elemento do menor obtido, o produto dos elementos que ficam nos pés das perpendiculares traçadas do elemento considerado às filas suprimidas.

Exemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & -5 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 4-8 & -5-12 & 8-8 \\ 6-6 & 9-9 & 4-6 \\ 3-2 & 4-3 & 5-2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-2) (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & -17 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

donde, finalmente: $\Delta = -2 \cdot (-4 + 17) = -26$

Justificação da regra de Chió.

Seja o determinante I da página 45 e consideremos a linha i de elementos não nulos.

Dividamos, então, a primeira coluna por a_i , a segunda por b_i etc.

Teremos:

$$\Delta = a_i \dots k_i \dots n_i \begin{vmatrix} a_1/a_i & b_1/b_i & \dots & k_1/k_i & \dots & n_1/n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n/a_i & b_n/b_i & \dots & k_n/k_i & \dots & n_n/n_i \end{vmatrix}$$

Subtraindo a coluna k de todas as outras, teremos (teorema de Jacobi)

$$\Delta = a_i \dots k_i \dots n_i \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_i} - \frac{k_1}{k_i} & \dots & \frac{k_1}{k_i} & \dots & \frac{n_1}{n_i} - \frac{k_1}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n}{a_i} - \frac{k_n}{k_i} & \dots & \frac{k_n}{k_i} & \dots & \frac{n_n}{n_i} - \frac{k_n}{k_i} \end{vmatrix}$$

Como os elementos da linha i são todos nulos, exceto o elemento 1 obtém-se o determinante de ordem $n-1$:

$$\Delta = (-1)^{i+i} a_i \dots k_i \dots n_i \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_i} - \frac{k_1}{k_i} & \dots & \frac{n_1}{n_i} - \frac{k_1}{k_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n}{a_i} - \frac{k_n}{k_i} & \dots & \frac{n_n}{n_i} - \frac{k_n}{k_i} \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira coluna por a_i , a segunda por b_i até a última por n_i e supondo k_i igual a um, o que é sempre possível, vem:

$$\Delta = (-1)^{i+i} \begin{vmatrix} a_1 - k_1 a_i & b_1 - k_1 b_i & \dots & n_1 - k_1 n_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - k_n a_i & b_n - k_n b_i & \dots & n_n - k_n n_i \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS*

Calcule os determinantes:

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} & 2. \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 14 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \quad 4. \begin{vmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} \\ 5. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} & 6. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad 7. \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 11 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} -5 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ 9. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & -1 & -3 \end{vmatrix} & 10. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ -7 & -2 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad 11. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & -8 & 2 \\ 4 & 10 & 9 & -9 \end{vmatrix} \end{array}$$

* Veja questões de concurso na pág. 73.

Desenvolver pela fila mais conveniente e calcular o valor dos determinantes:

$$12. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \\ 11 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad 13. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & a & 0 & 0 \\ y & x & a & 0 \\ z & x & y & a \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Escreva imediatamente o valor, utilizando as propriedades.

$$16. \begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ -5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad 17. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad 18. \begin{vmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 19. \begin{vmatrix} 5 & 8 & -3 \\ 4 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Fixando a primeira coluna e aplicando o teorema de Jacobi, calcule:

$$20. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 3 & -8 \end{vmatrix} \quad 21. \begin{vmatrix} 8 & 3 & 19 \\ 1 & -2 & 3 \\ 15 & -18 & 30 \end{vmatrix} \quad 22. \begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Torne inteiros os elementos e, em seguida, calcular:

$$23. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 24. \begin{vmatrix} 2/3 & 3/4 & 5/8 & 1/2 \\ 10 & -7 & 11 & 10 \\ 3 & -6 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad 25. \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Resolva as equações:

$$26. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \\ 2 & k & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad 27. \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 28. \begin{vmatrix} x & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$29. \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ x & 9 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 30. \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & k \\ 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

RESPOSTAS:

$$\begin{array}{llllll} 1. -1 & 2. 186 & 3. -78 & 4. 92 & 5. 0 & 6. 129 & 7. -51 & 8. -14 & 9. 98 \\ 10. 424 & 11. -85 & 12. 105 & 13. a^4 & 14. -192 & 15. -168 & 16. 0 \\ 17. 0 & 18. 0 & 19. 0 & 20. -36 & 21. 225 & 22. -5 & 23. 5/12 & 24. 0 \\ 25. -\frac{209}{120} & 26. 4 & 27. 3 & 28. 8 \text{ e } 12 & 29. \pm 3 & 30. -5/4 \text{ e } 1. \end{array}$$

Assim, o sistema (1) será equivalente ao sistema:

$$(4) \begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta x_n = \Delta_n \end{cases}$$

Se Δ for diferente de zero, o sistema (4), e portanto o sistema (1), admitirá a solução única:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (5),$$

o que demonstra o teorema de Cramer.

† 11. Regra de Cramer. Das igualdades (5) conclui-se a regra para obter a solução do sistema:

O valor de cada incógnita obtém-se, dividindo o determinante da mesma incógnita pelo determinante do sistema.

Exemplo.

Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 8 \\ 2x - y + 7z &= 11 \\ x + 5y - 2z &= 11 \end{aligned}$$

Calculando o determinante do sistema e os determinantes das incógnitas pela regra de Chió, obteremos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & +1 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} = -143 + 11 = -132$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 11 & -1 & 7 \\ 11 & 5 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 11 & 1 & 7 \\ 11 & -5 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 30 & 9 \\ 66 & 33 \end{vmatrix} = -(990 - 594) = -396.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 2 & 11 & 7 \\ 1 & 11 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25 & 1 \\ -11 & 11 \end{vmatrix} = -275 + 11 = -264$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 11 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -25 \\ -11 & -11 \end{vmatrix} = 143 - 275 = -132$$

$$\text{Conclui-se: } x = \frac{-396}{-132} = 3; y = \frac{-264}{-132} = 2 \text{ e } z = \frac{-132}{-132} = 1.$$

OBSERVAÇÕES.

1.ª) É conveniente passar sempre os termos constantes para os segundos membros das equações e escrever em todas as equações as incógnitas na mesma ordem.

2.ª) Sempre que alguma incógnita não figure em uma das equações, o elemento correspondente no determinante é zero.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ y + 2z = 8 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ y + 2z = 8 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Ao determinante δ_r , assim formado, dá-se o nome de *determinante característico* do sistema. Cada linha que se acrescenta a Δ fornece um determinante característico. Logo, podemos concluir que o número destes será $m - p$.

Exemplo.

Formar o determinante principal e todos os característicos do sistema :

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 12 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 5y - 2x + z = 5 \\ y + 4x + 9z = 23 \end{cases}$$

1.º) **Determinante principal.** Equações e incógnitas principais.

Temos a matriz :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Todos os determinantes de terceira ordem são nulos porque a terceira coluna é uma combinação linear das duas primeiras. Consideremos o determinante de segunda ordem.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 = -7.$$

Assim, o determinante principal é de segunda ordem, as equações principais são as duas primeiras e as incógnitas principais, x e y . É claro que poderíamos tomar como principal um outro de segunda ordem. Variariam as equações e incógnitas principais.

2.º) **Determinantes característicos.** Existem dois característicos pois há duas linhas excedentes na matriz :

$$\delta' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \delta'' = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

13. Teorema de Rouché.

A condição necessária e suficiente para que um sistema seja possível, é que todos os determinantes característicos sejam nulos ou não existam.

Demonstração.

Passemos as constantes para os primeiros membros das equações do sistema (6) (pág. 64), e representemos por $E_1, E_2, \dots$ os primeiros membros das equações transformadas; assim:

$$E_1 = a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + \dots + p_1 \cdot x_p + \dots + n_1 \cdot x_n - k_1.$$

Contornemos, então, o determinante principal, Δ (pág. 65), com uma das $m - p$ linhas excedentes da matriz e com a coluna $E_1, E_2, \dots$

Supondo acrescentada a linha r , o determinante obtido nas condições citadas será :

$$D = \begin{vmatrix} \Delta & E_1 \\ & E_2 \\ & E_p \\ a_r, b_r, \dots, p_r, E_r \end{vmatrix}$$

De acordo com o teorema da adição de filas, o determinante D é a soma de $n + 1$ determinantes, pois a coluna $E_1, E_2, \dots$ tem $n + 1$ parcelas, isto é :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & a_1 \cdot x_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & a_2 \cdot x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & \dots & a_r \cdot x_1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & n_1 \cdot x_n \\ a_2 & b_2 & \dots & n_2 \cdot x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & \dots & n_r \cdot x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & -k_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & -k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & \dots & -k_r \end{vmatrix}$$

As parcelas de D são todas nulas exceto a última. Realmente, as p primeiras são nulas por terem duas colunas proporcionais e as seguintes, exceto a última, são também nulas por serem determinantes de ordem $p + 1$ formados com elementos da matriz. Finalmente a última parcela é o determinante característico δ_r com o sinal trocado. Logo, temos :

$$D = - \delta_r \dots \dots (7), \text{ qualquer que seja } r > p.$$

Exemplos.1.º) *Discutir e resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Resolução. Temos a matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

O determinante principal é, no máximo, de segunda ordem. Tomando as duas primeiras linhas, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

O único característico é:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

O característico é diferente de zero e o sistema é impossível.

2.º) *Achar os valores de α e β de modo que o sistema*

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = \alpha \\ 4x + y - 5z = 2 \\ 10x + \beta y - 7z = 8 \end{cases}$$

seja indeterminado e resolvê-lo para os valores encontrados de α e β .

Temos a matriz:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 10 & \beta & -7 \end{vmatrix}$$

a) *Determinação de α e β .*

Para que o sistema seja indeterminado a ordem do determinante principal deve ser menor que 3; logo, o único determinante de 3.ª ordem deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 10 & \beta & 7 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} -11 & 11 \\ -11 & \beta + 14 \end{vmatrix} = 0$$

donde: $-11\beta - 33 = 0$ e $\beta = -3$.

Podemos, então, tomar para principal o de 2.ª ordem, formado com elementos da 1.ª e 3.ª colunas da matriz:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -11$$

O único característico deve ser nulo; logo, temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & +1 & \alpha \\ 4 & +5 & 2 \\ 10 & +7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} -11 & 2 - 5\alpha \\ -11 & 8 - 7\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

donde: $-88 + 77\alpha + 22 - 55\alpha = 0$ e $\alpha = 3$.b) *Resolução do sistema.*

Considerando as equações e incógnitas principais, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} 3x - z = 3 + 2y \\ 4x - 5z = 2 - y \end{cases}$$

Donde resulta :

$$D = -11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3+2y & -1 \\ 2-y & -5 \end{vmatrix} = -13-11y$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3+2y \\ 4 & 2-y \end{vmatrix} = 6-3y-12-8y = -6-11y$$

E, portanto :

$$x = \frac{-13-11y}{-11} = \frac{13+11y}{11}$$

$$z = \frac{-6-11y}{-11} = \frac{6+11y}{11}$$

EXERCÍCIOS

Resolver os sistemas, aplicando a regra de Cramer :

$$1. \begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 2x + 7y = 43 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7x + 2y = 17 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - y + z = 17 \\ 3y + 5x - 2z = 10 \\ 4y - 5z + 7x = 3 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2x + y + z = 14 \\ 2y - x + t = 3 \\ 3x - 2z - t = 11 \\ 4y + z - 3t = 7 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 22 \\ 4y - 2x = 30 \\ 4y + 2z = 14 \\ 5y + u = 32 \end{cases}$$

Discutir e resolver os sistemas :

$$7. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 5x + 4y - 3z = 7 \\ 2x - 17y + 12z = 10 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 7 \\ 3x - y + 8z = 28 \\ 4x - 2y + 10z = 34 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad 11. \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ 3x - 4y - z = 0 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 3x - y + 5z = 12 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 5y - 2x + z = 5 \\ 4x + y + 9z = 23 \end{cases}$$

13. Determinar os valores de k e p de modo que o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + ky + z = p \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

seja : a) determinado, b) indeterminado, c) impossível.

14. Determinar os valores de α e β de modo que o sistema seguinte seja indeterminado

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \alpha \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + \beta y + 3z = 14 \end{cases}$$

15. Determinar o valor de m de modo que seja possível o sistema :

$$\begin{cases} x + y - 3z + 6 = 0 \\ 5x + y - 4z + 5 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 5y + mz + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{E. Militar - 1946})$$

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO

16. Resolver a equação: (F. Arq. U. S. Paulo - 53) $\begin{vmatrix} \log x & \log 10 & \log 10 \\ 10 & x & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

17. Dê o valor do determinante, sob a forma de um produto de 3 fatores $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (E.N.E. - 1958)

18. Calcular $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ (E.N.E. - 1951)

19. Calcular o produto $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (E. Eng. Recife - 1940)

20. Mostrar que todo determinante formado com 9 termos consecutivos da sucessão 1, 2, 3, 5, 18, 13... é nulo. (E.N.E. - 1939)

21. Calcular, pelo teorema de Rouché, os valores de a e b , de modo que o sistema abaixo seja indeterminado e resolver o sistema para esses valores de a e b (E.N.E. - 1947):

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$$

22. Calcular k de modo que o sistema seguinte, no qual a e b são dados e $ab \neq 0$, tenha solução:

$$\begin{cases} ax + by = b \\ ay + bz = -a \\ x + z = k \\ a(a+b)x + 2aby + b(a+b)z = 1 \end{cases} \quad (\text{E. Flu. E. - 1958}).$$

23. Discutir o sistema $mx + y - z = 0$
 $x + my + z = 0$
 $x - y = 2$

(I.T.A. - 953).

24. Discutir e resolver o sistema $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$
 (E. Técnica. Ex. - 1948)

25. Aplicar o teorema de Rouché às equações:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ \frac{x}{a} + y + bz = 1 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = 1 \end{cases} \quad \text{Resp.: } ab \neq 0 \quad \begin{cases} a \neq b - \text{Sist. det.} \\ a = b \neq 1 - \text{Sist. imp.} \\ a = b = 1 - \text{Sist. ind.} \end{cases}$$

(E.N.E. - 1939)

26. Calcule x de modo que o determinante seguinte seja igual a -9 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(E.P.U.C. - Rio, 1960)}$$

Resp.: $x = \pm \sqrt{3}$

27. Verifique e justifique porque é nulo o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a + d \\ 1 & b & 2b + d \\ 1 & c & 2c + d \end{vmatrix} \quad \text{(I.T.A. - 1959).}$$

R E S P O S T A S:

1. 4 e 5 2. 3 e -2 3. 1, 2 e 3 4. 4, 0 e 5 5. 5, 3, 1 e 2
 6. -3, 6, -5 e 2 7. Impossível 8. Ind. $11 - 3z$ e $5 - z$ 9. $x = -3z$ e $y = z$
 10. 0, 0, 0. 11. 3, 2 e 1 12. Indeterminado: $5 - 2z$ e $3 - z$.
 13. $k \neq 0,8$ - determinado; $k = 0,8$ e $p = 1,6$ - indeterminado; $k = 0,8$
 $p \neq 1,6$ - impossível. 14. 9 e 1 15. - 4 16. 10 17. $a(c - b)(b - a)$
 18. $a(b - a)(c - b)(d - c)$ 19. 198 21. $a = -2$, $b = 5$, $x = -2z - 2$, $y = -z - 3$.
 22. $1/ab$ 23. $m \neq -1$ - Det.; $m = -1$ - Indet. 24. Ind. $x = -z$; $y = -1 - z$.

SEGUNDA PARTE

TRIGONOMETRIA

UNIDADE IV

VETORES. FUNÇÕES CIRCULARES DIRETAS

I — VETORES

1. Reta orientada. *Reta orientada* é a reta na qual se convencionou distinguir como *positivo* um sentido de deslocamento de um ponto móvel. O sentido contrário é *negativo*.

Simboliza-se a reta orientada por duas letras, cuja ordem indica o sentido positivo; assim, dizemos a reta orientada $x'x$ (fig. 1) para indicar que o sentido positivo de deslocamento é de x' para x , como indica a seta.



FIG. 1

2. Eixo. *Eixo* é a reta orientada onde se fixa um ponto 0 como origem dos deslocamentos e se considera uma unidade de comprimento u , como indica a figura 2.

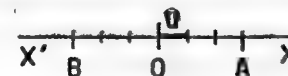


FIG. 2

3. Segmento orientado. *Segmento de reta orientado* ou, apenas, *segmento orientado* é o segmento de uma reta orientada ou de um eixo, como AB na fig. 2, isto é, o segmento onde se considera um sentido de percurso.

O segmento orientado representa-se pelo símbolo $\overline{AB}$. O ponto A denomina-se *origem* e o ponto B , *extremidade*.

Módulo ou **valor absoluto** é a medida do comprimento de um segmento orientado. Representa-se com o símbolo AB ou $|AB|$.

Assim, na fig. 2, temos: $OA = 3$ ou $|OA| = 3$ e $OB = 3$;

Valor algébrico ou medida algébrica de um segmento orientado é o número relativo cujo módulo é o valor absoluto do segmento e que tem sinal $+$ se o sentido do segmento é positivo e $-$, se negativo. Representa-se pelo símbolo $\overline{AB}$ ou (AB) . Na fig. 2, por exemplo, temos:

$$\overline{OA} = +3; \overline{OB} = -3; \overline{AB} = -6 \text{ e } \overline{BA} = +6.$$

Segmentos opostos são os que têm mesmo módulo e sentidos contrários, como $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$, para os quais se tem:

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \text{ ou } \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Suporte de um segmento é o eixo que contém o segmento.

4. Segmentos equípolentes. São segmentos orientados que têm mesmo sentido, mesmo módulo e suportes paralelos, isto é, que podem coincidir deslocando um deles por translação.

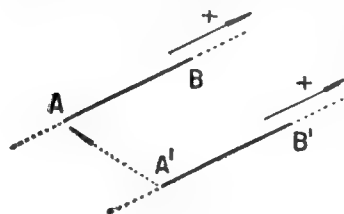


FIG. 3

Na figura 3, $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos equípolentes, pois podem coincidir pela translação indicada por $A'A$.

5. Vetor. Chama-se *vetor livre* de um segmento AB ou, apenas, *vetor* AB o símbolo que corresponde a todos os segmentos equípolentes a AB e que pode ser representado *arbitrariamente* por qualquer desses segmentos.

O vetor livre AB representa-se pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$ e é caracterizado por três elementos:

- módulo** — é o do segmento orientado que o representa;
- sentido** — é o do deslocamento da origem A para a extremidade B ;
- direção** — é o suporte do segmento que o representa.

O valor algébrico de um vetor $\overrightarrow{AB}$ representa-se por $\overline{AB}$ e o módulo por AB .

Vetor nulo — é o vetor de módulo zero e cuja direção é indeterminada.

Vetor unitário de um eixo ou versor — é o vetor do eixo, cuja medida algébrica é $+1$, isto é, de sentido positivo e cujo módulo é a unidade de comprimento.

Para indicar que dois vetores são equípolentes escreve-se:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Essa relação entre vetores denomina-se **equípola**.

6. Grandezas escalares e vectoriais. As grandezas classificam-se em **escalares** e **vectoriais**.

A **grandeza é escalar** quando em sua conceituação não interfere a *noção de direção*. Exemplos: massa, temperatura, área, etc. A medida de uma grandeza escalar é traduzida por um *número relativo*.

A **grandeza é vectorial** quando sua conceituação não pode dispensar a *noção de direção*. Exemplo: a força.

A medida de uma grandeza vectorial é traduzida por um **vetor**.

7. Soma geométrica ou resultante. Sejam a, b, c, d vetores dados (fig. 4). De um ponto arbitrário O tracemos os vetores consecutivos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$, respectivamente equípolentes aos vetores dados e que formam a poligonal $OABCD$.

Chama-se **soma geométrica**, ou **resultante** dos vetores dados

o vetor $\overrightarrow{OD}$ determinado pelo ponto O e a extremidade D do último vetor.

Para indicar a soma, escreve-se a equípola:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{r} \quad (\text{fig. 4})$$

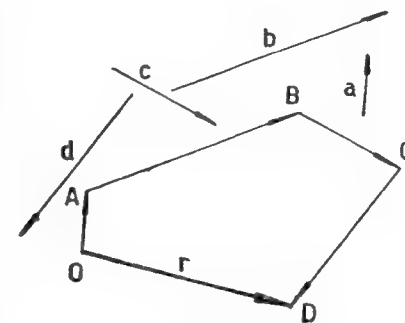


FIG. 4

Os vetores dados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ são chamados *componentes*.

A soma geométrica goza das mesmas propriedades da soma algébrica: comutatividade, associatividade, etc.

O contórno $OABCD$ chama-se *cadeia* ou *polígono dos vetores*.

OBSERVAÇÃO. Se o ponto D coincidir com O o contórno diz-se *fechado* e a resultante é *nula*.

3. Propriedades dos vetores colineares.

1.ª Relação de Chasles.

Dados três pontos sôbre um eixo, A, B, C , em qualquer ordem, tem-se a relação:
 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Demonstração.

Considerando os segmentos de mesmo sentido (fig. 5), temos a soma:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$



FIG. 5

Substituindo $\overline{AC}$ por $-\overline{CA}$, por serem segmentos opostos

vem:
$$\overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{CA}$$

ou, transpondo:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

OBSERVAÇÃO. A mesma demonstração será usada para as demais posições possíveis.

2.ª Relação de Moebius.

Não é mais que a generalização da relação de Chasles:

Dados vários pontos sôbre um eixo, $A, B, C \dots K, L$, tem-se a relação:
 $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0$

Realmente, considerando os três pontos A, K e L , temos pela relação anterior:

$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0$$

Por outro lado: $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BC} + \dots$

Logo, vem, substituindo:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0$$

II — PROJEÇÕES ORTOGONAIS.

9. Projeção ortogonal de um ponto sôbre um eixo. Projeção ortogonal de um ponto sôbre um eixo é o pé da perpendicular traçada do ponto ao eixo. Assim, na figura 6, o ponto P é a projeção de M sôbre $x'x$.

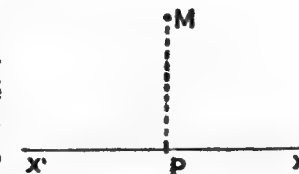


FIG. 6

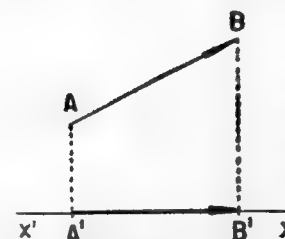


FIG. 7

10. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo é o vetor desse eixo que tem para origem e extremidade respectivamente as projeções da origem e extremidade do vetor dado.

Assim, na figura 7, temos:

$$\text{pr. } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

OBSERVAÇÕES:

- 1.º) Quando o vetor é perpendicular ao eixo, sua projeção é nula.
- 2.º) Quando o vetor é paralelo ao eixo, a projeção tem o mesmo módulo do vetor.
- 3.º) As projeções de dois vetores eqüipolentes sobre o mesmo eixo são eqüipolentes.

11. Projeção da resultante. Teorema de Carnot.

A medida algébrica da projeção da resultante é igual à soma das medidas algébricas das projeções das componentes.

Demonstração.

Seja o polígono de vetores $OABC$ de resultante $\vec{r}$ (fig. 8). Considerando as projeções sobre o eixo $x'x$ teremos, pela relação de Mœbius:

$$\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'O'} = 0$$

donde:

$$\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = -\overrightarrow{C'O'}$$

e finalmente:

$$\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{O'C'}$$

ou, o que é o mesmo:

$$(\text{pr } \vec{OA}) + (\text{pr } \vec{AB}) + (\text{pr } \vec{BC}) = (\text{pr } \vec{r})$$

Dêsse teorema resulta que, se tivermos a eqüipolência:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$$

podemos concluir, qualquer que seja o eixo de projeção:

$$(\text{pr. } \vec{a}) + (\text{pr. } \vec{b}) = (\text{pr. } \vec{r})$$

Conseqüência.

A projeção de um contôrno poligonal fechado é nula.

III — ARCOS E ÂNGULOS

1. Circunferência orientada. Círculo trigonométrico.
Circunferência orientada ou ciclo é a circunferência sobre a qual se fixou uma origem A e se escolheu um sentido de deslocamento, como sentido positivo.

Convencionou-se tomar como *sentido positivo*, o *sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio*. O sentido oposto é negativo, como indicam as setas na figura 9.

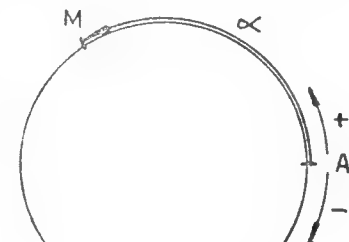


FIG. 9

Círculo trigonométrico é o que tem a circunferência orientada e cujo raio é tomado como unidade de comprimento.

2. Arco generalizado. Arco trigonométrico. Consideremos um ponto móvel deslocando-se sobre a circunferência do círculo trigonométrico (fig. 9), a partir da origem A , sempre no mesmo sentido, até parar no ponto M . O ponto móvel pode parar no ponto M logo que o atinja, ou depois de percorrer a circunferência um número qualquer de vêzes.

Ao caminho descrito pelo ponto móvel dá-se, em qualquer dos casos, o nome de *arco* AM .

O ponto A chama-se *origem* do arco e o ponto M , *extremidade* do arco.

Temos, então, a definição:

Arco $\widehat{AM}$ é um qualquer dos caminhos percorridos sobre a circunferência por um ponto móvel que se desloca, sempre no mesmo sentido, da origem A à extremidade M .

A medida algébrica de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é um número relativo; positivo, se o ponto móvel percorreu a circunferência no sentido positivo; negativo, em caso con-

trário. O arco é, pois, uma grandeza contínua cuja medida algébrica varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Observemos que a cada número relativo corresponde um e só um arco $\widehat{AM}$, isto é, um arco que tem uma origem e uma extremidade determinadas, como mostra a figura 10. Ao contrário, dados dois pontos A e M sobre a circunferência, existe uma infinidade de números relativos, positivos e negativos,

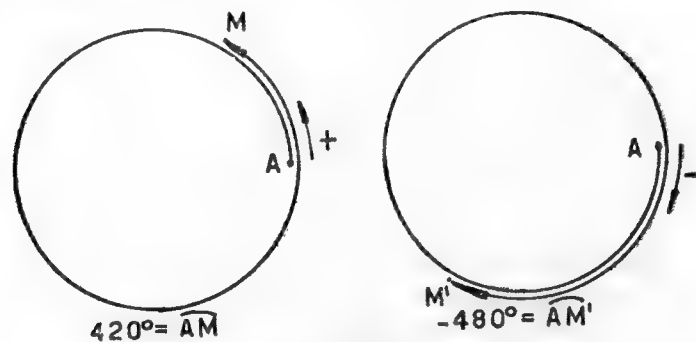


FIG. 10

que são medidas algébricas do arco $\widehat{AM}$. Estas medidas diferem pelo número de circunferências que cada uma contém.

Um arco $\widehat{AM}$ tem, pois, uma infinidade de determinações, a cada uma correspondendo uma medida algébrica.

O arco geométrico $\widehat{AM}$ menor que uma circunferência, e de sentido positivo, chama-se menor determinação do arco $\widehat{AM}$.

3. Expressão geral da medida algébrica de todos os arcos $\widehat{AM}$. Seja α a medida, em graus, da menor determinação dos arcos $\widehat{AM}$ (fig. 9).

Suponhamos que o móvel parte de A no sentido positivo.

A primeira vez que ele atinge o ponto M , a medida algébrica do arco descrito é α ;

a segunda vez, a medida algébrica é $360^\circ + \alpha$;

a terceira vez será $2 \times 360^\circ + \alpha$; e, assim por diante. O arco descrito terá por expressão geral

$$n \times 360^\circ + \alpha, \quad (1)$$

onde n é um inteiro, positivo ou nulo.

Suponhamos, em seguida, que o móvel parte de A no sentido negativo.

A primeira vez que ele atingir o ponto M terá percorrido o arco geométrico $360^\circ - \alpha$ que, como é negativo, terá para medida algébrica

$$-(360^\circ - \alpha) = -360^\circ + \alpha;$$

a segunda vez que atingir M o arco descrito terá para valor absoluto $2 \times 360^\circ - \alpha$ e para medida algébrica

$$-(2 \times 360^\circ - \alpha) = -2 \times 360^\circ + \alpha$$

e assim por diante, a expressão geral será

$$n' \times 360^\circ + \alpha \quad (2)$$

onde n' é um número negativo.

Considerando as expressões (1) e (2), concluímos que as medidas algébricas de todos os arcos $\widehat{AM}$ ficam de um modo geral representadas pela expressão.

$$\widehat{AM} = k \times 360^\circ + \alpha$$

onde k é um número inteiro nulo, positivo (n) ou negativo (n').

Analogamente teríamos, para as medidas em radianos:

$$\widehat{AM} = k \times 2\pi + \alpha \text{ ou } \widehat{AM} = 2k\pi + \alpha$$

Exemplos.

1.º A menor determinação de um arco $\widehat{AM}$ tem por medida algébrica 150° . Escrever a expressão geral das medidas algébricas de todos os arcos $\widehat{AM}$.

Temos imediatamente:

$$\widehat{AM} = k \cdot 360^\circ + 150^\circ$$

2.º) Sendo 2.008° a medida algébrica de uma das determinações de um arco AM , qual a menor determinação?

Para achar a menor determinação, basta subtrair da que foi dada as circunferências nela contidas. Assim, dividindo por 360° , obtemos:

$$2.008^\circ = 5 \times 360^\circ + 208^\circ,$$

e a menor determinação mede 208° .

3.º) Sendo $14\pi/3$ a medida algébrica de uma das determinações de um arco AM , achar a expressão geral das medidas algébricas de todos os arcos AM .

Temos:

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} = 2 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

A menor determinação tem por medida $\frac{2\pi}{3}$; logo, a expressão geral será

$$\widehat{AM} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

4. Generalização da noção de ângulo. Suponhamos a semi-reta fixa OA (fig. 11) e a semi-reta OM , girando em torno de O . A semi-reta OM pode girar em torno de O em qualquer dos dois sentidos e passar pela semi-reta fixa OA um número qualquer de vezes. Dizemos, em qualquer dos casos que a semi-reta OM gerou um ângulo AOM ou (OA, OM) .

O lado OA chama-se *lado origem* e OM , *lado extremidade*.

Podemos, então, concluir que as semi-retas OA e OM definem uma infinidade de ângulos trigonométricos, cujas medidas algébricas têm por expressão geral, de modo análogo aos arcos:

$$(OA, OM) = k \cdot 360^\circ + \alpha \quad \text{ou}$$

$$(OA, OM) = 2k\pi + \alpha;$$

sendo k um número inteiro qualquer.

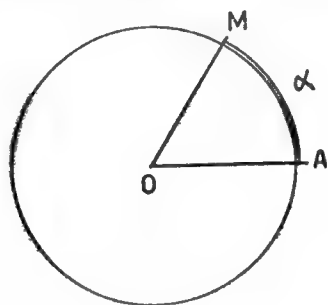


FIG. 11

5. Quadrantes. Se traçarmos dois eixos *perpendiculares* com a origem no centro O do círculo trigonométrico de modo que um deles passe na origem A , a circunferência fica dividida em quatro regiões que se denominam **quadrantes**:

1.º quadrante: AB ; 2.º: BA' ; 3.º: $A'B'$; 4.º: $B'A$ (fig. 12).

Diz-se que um arco é do primeiro quadrante quando sua extremidade fica entre A e B , do segundo, quando entre B e A' e assim por diante. Na figura 12, o arco $\widehat{AM}_1$ é do primeiro, $\widehat{AM}_2$ do segundo, $\widehat{AM}_3$ do terceiro e $\widehat{AM}_4$ do quarto quadrante.

Para determinar o quadrante de um arco basta achar sua *menor determinação*. Se esta ficar compreendida entre 0 e $\pi/2$ (ou 0° e 90°) o arco é do *primeiro* quadrante, se entre $\pi/2$ e π (90° a 180°) é do *segundo*, entre π e $3\pi/2$ (180° a 270°), do *terceiro* e, finalmente, entre $3\pi/2$ e 2π (270° a 360°) será do *quarto*.

Exemplos.

1.º) Determinar o quadrante do arco de $1390^\circ 36'$.

Dividindo o arco por 360° , obtemos:

$$1390^\circ 36' = 360^\circ \times 3 + 310^\circ 36'.$$

A menor determinação tem por medida $310^\circ 36'$, compreendida entre 270° e 360° . O arco é do *quarto quadrante*.

2.º) Determinar o quadrante do arco que tem por medida $21\pi/5$.

Extraindo os inteiros e dividindo a parte inteira por 2π :

$$\frac{21\pi}{5} = 4\pi + \frac{\pi}{5} = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{5}.$$

A menor determinação, $\pi/5$, está compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{2}$; logo, o arco é do *primeiro quadrante*.

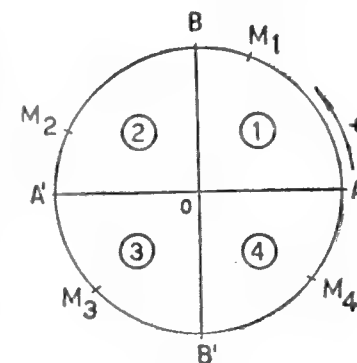


FIG. 12

EXERCÍCIOS

- Escrever, em graus, grados e radianos, as expressões gerais dos arcos que têm extremidade respectivamente nos pontos A , B , A' , B' .
- No círculo trigonométrico inscreve-se o hexágono regular $ABCDEF$, com o vértice A na origem dos arcos. Escrever as expressões gerais dos arcos, cujas extremidades coincidem com os vértices do hexágono.
- Quais as menores determinações dos arcos $\frac{19\pi}{3}$, 1.280 gr e 2.130° ?
 $\text{Resp.: } \frac{\pi}{3}, 80 \text{ gr e } 330^\circ.$
- Quais as medidas em graus dos arcos $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{6}$?
 $\text{Resp.: } 157^\circ 30', 150^\circ, 40^\circ, 108^\circ, 30^\circ.$
- Achar os valores, em radianos, dos arcos de 15° , $22^\circ 30'$, 30° , 45° , 60° , 75° .
 $\text{Resp.: } \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$
- Determinar os quadrantes dos arcos 2.840° , 1.560° , 1.410° , $1.328^\circ 38' 45''$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{15\pi}{6}$, $\frac{23\pi}{9}$ e $\frac{18\pi}{5}$.
 $\text{Resp.: } 4^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 3^\circ, 1^\circ, 1^\circ \text{ ou } 2^\circ, 2^\circ, 4^\circ.$
- Uma das determinações de um arco AM tem por medida 1560° . Escrever a expressão geral das medidas de todos os arcos AM .
 $\text{Resp.: } k 360^\circ + 120^\circ.$
- A medida de uma das determinações do arco AM é 3520° . Achar a expressão geral das medidas de todos os arcos AM .
 $\text{Resp.: } k 360^\circ + 280^\circ.$
- Uma das determinações de um arco AM tem por medida, em radianos, $\frac{17\pi}{3}$. Escrever a expressão geral das medidas de todos os arcos AM .
 $\text{Resp.: } 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ ou } k 360^\circ + 300^\circ.$
- Quais as medidas do arco AM , compreendidas entre -400° e 1000° , sendo de 200° uma das determinações de AM ?
 $\text{Resp.: } -160^\circ, 200^\circ, 560^\circ, 920^\circ.$
- Quais os arcos positivos menores que 1000° , cujas extremidades coincidem com a de 240° ?
 $\text{Resp.: } 600^\circ, 960^\circ.$
- Quais as medidas do arco AM , compreendidas entre 0 e 720° , sendo 40° sua menor determinação?
 $\text{Resp.: } 40^\circ, 400^\circ.$

- Achar o valor geral de x sabendo que $3x - 45^\circ$ e $2x + 135^\circ$ exprimem as medidas de duas determinações de um arco AM .
 $\text{Resp.: } (2k + 1) 180^\circ.$
- Qual o menor valor positivo de x de modo a serem $3x + \pi$ e $x + 40^\circ$ duas determinações de um mesmo arco AM ?
 $\text{Resp.: } 110^\circ.$
- Dado o arco AM , de expressão $k 360^\circ + \alpha$, quantas extremidades distintas terá o arco $AM/5$?
 $\text{Resp.: } 5.$

IV — FUNÇÕES CIRCULARES DIRETAS

1. Seno.

a) **Eixo dos senos** — é o eixo $B'B$ (fig. 13), cujo vetor unitário é $\vec{OB}$, isto é, que tem sentido positivo de O para B e onde $\vec{OB} = +1$.

b) **Seno de um arco AM** — é a medida algébrica da projeção do raio OM da extremidade do arco sobre o eixo $B'B$. Representa-se com o símbolo:

$$\text{sen } \widehat{AM}$$

Assim, temos na figura 13:

$$\begin{aligned} \text{sen } \widehat{AM}_1 &= \overline{OQ}_1; \text{ sen } \widehat{AM}_2 = \overline{OQ}_2; \\ \text{sen } \widehat{AM}_3 &= \overline{OQ}_3; \text{ sen } \widehat{AM}_4 = \overline{OQ}_4 \end{aligned}$$

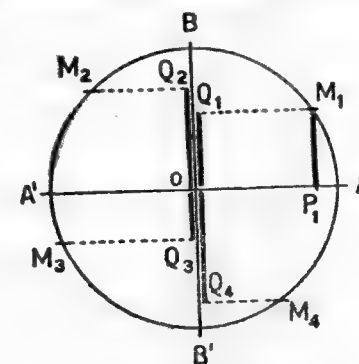


FIG. 13

Em lugar de medir o seno sobre o eixo $B'B$ é comum considerar-se o vetor eqüipolente. Escreve-se, considerando, como exemplo, o arco $\widehat{AM}_1$:

$$\text{sen } \widehat{AM}_1 = \overline{P_1 M_1}.$$

É importante observar que o valor do seno depende exclusivamente da posição do ponto M , sendo o mesmo qualquer que seja a determinação de $\widehat{AM}$.

- c) **Sinal do seno.** As projeções sobre o eixo $B'B$ são positivas acima do ponto O e negativas abaixo; assim, conclui-se:

O seno é positivo quando o arco é do 1.º ou do 2.º quadrante; o seno é negativo quando o arco é do 3.º ou do 4.º quadrante.

Exemplos.

$\sin 150^\circ > 0$, porque 150° é do 2.º quadrante

$\sin 615^\circ < 0$, porque, $615^\circ = 360^\circ \times 1 + 255^\circ$, é do 3.º quadrante.

- d) **Variação do valor do seno.** Suponhamos um arco variável $\widehat{AM} = x$.

Quando o ponto M percorre a circunferência uma primeira vez, o valor x do arco $\widehat{AM}$ varia de 0 a 2π . A projeção Q do ponto M sobre o eixo $B'B$ fica necessariamente entre B e B' (fig. 13). Resulta ser o seno um número relativo compreendido entre -1 e $+1$, podendo atingir estes valores. Assim se representarmos por y o valor do seno do arco variável x , teremos:

$$y = \sin x,$$

chamada *função circular direta*, por ser a variável x um arco de círculo.

Do exposto conclui-se que o valor do seno varia de acordo com o seguinte quadro (veja a figura 13), onde as setas indicam se a função *cresce* ou *decresce*.

POSIÇÃO DE M	A	B	A'	B'	A
Valor do arco x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Valor de $y = \sin x$		$\nearrow +1$ (máx.)	$\searrow$	(mín.) -1	$\nearrow$

- e) **Observação.** O valor inverso do seno, $\frac{1}{\sin x}$, denomina-se **CO-SECANTE** e representa-se pelo símbolo $\csc x$. Assim:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Obtemos, então, uma outra função circular: $y = \csc x$, embora de uso muito limitado e que substituiremos sempre por $\frac{1}{\sin x}$.

2. Co-seno.

- a) **Eixo dos co-senos** — é o eixo $A'A$ (fig. 14) cujo vetor unitário é $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{OA} = +1$).

- b) **Co-seno de um arco $\widehat{AM}$** — é a medida algébrica da projeção do raio OM da extremidade do arco sobre o eixo $A'A$. Representa-se pelo símbolo.

$$\cos \widehat{AM}$$

Assim, temos, na figura 14:

$$\cos \widehat{AM}_1 = \overline{OP}_1, \cos \widehat{AM}_2 = \overline{OP}_2,$$

$$\cos \widehat{AM}_3 = \overline{OP}_3, \cos \widehat{AM}_4 = \overline{OP}_4.$$

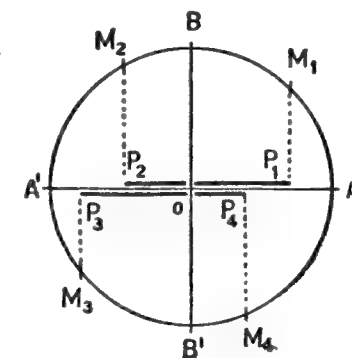


FIG. 14

- c) **Sinal do co-seno.** As projeções sobre o eixo $A'A$ são positivas à direita do ponto O e negativas à esquerda (fig. 14). Conclui-se:

o co-seno é positivo quando o arco é do 1.º ou do 4.º quadrante;

o co-seno é negativo quando o arco é do 2.º ou do 3.º quadrante.

Exemplos: $\cos 150^\circ < 0$, pois 150° é do 2.º quadrante
 $\cos 1.410^\circ > 0$, porque $1.414^\circ = 360^\circ \times 3 + 330^\circ$
 é do 4.º quadrante

d) Variação do valor do co-seno. Se representarmos por x o valor de um arco variável $\widehat{AM}$ e por y o valor do co-seno teremos a *segunda função circular*:

$$y = \cos x$$

A projeção P da extremidade M sobre o eixo $A'A$ fica necessariamente entre A e A' (fig. 14). Resulta ser o co-seno um número relativo compreendido no intervalo $(-1, +1)$ e a função co-seno varia de acôrdo com o seguinte quadro (veja a figura 14):

POSIÇÃO DE M	A	B	A'	B'	A
Valor do arco x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Valor de $y = \cos x$					
		+1 (máx.)		-1 (mín.)	+1

e) Observação. O valor inverso do co-seno, $\frac{1}{\cos x}$, denomina-se SECANTE e representa-se pelo símbolo $\sec x$.

Assim:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

A função $y = \sec x$ é de uso pouco freqüente e deve ser sempre substituída por $\frac{1}{\cos x}$.

3. Tangente.

a) Eixo das tangentes — é o eixo $t't$, tangente à circunferência no ponto A , orientado como indica a figura 15 e cujo vetor unitário é equípolete a OB (raio igual à unidade).

b) Tangente de um arco $\widehat{AM}$ — é a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{AT}$ (fig. 15) que tem origem em A e extremidade na interseção do eixo $t't$ com o suporte do raio OM . Representa-se com o símbolo

$$\tan \widehat{AM} \text{ ou } \operatorname{tg} \widehat{AM}.$$

Teremos, na figura 15:

$$\tan \widehat{AM}_1 = \overline{AT}_1, \tan \widehat{AM}_2 = \overline{AT}_2,$$

$$\tan \widehat{AM}_3 = \overline{AT}_3, \tan \widehat{AM}_4 = \overline{AT}_4.$$

c) Sinal da tangente. De acôrdo com a orientação do eixo $t't$ a tangente é positiva quando a sua extremidade está acima do ponto A e negativa quando está abaixo.

Conclui-se, então:

a tangente é positiva quando o arco é do 1.º ou do 3.º quadrante;

a tangente é negativa quando o arco é do 2.º ou do 4.º quadrante.

d) Variação do valor da tangente. Representemos por x o valor do arco variável $\widehat{AM}$ e por y o valor da tangente.

Teremos a *terceira função circular*:

$$y = \tan x.$$

Quando o ponto M percorre o primeiro quadrante a partir do ponto A , a tangente cresce a partir de zero (fig. 15), assumindo os valores $\overline{AT}_1$, $\overline{AT}_3$, etc. Observemos que

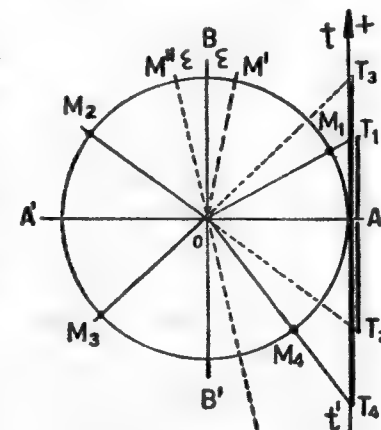


FIG. 15

a extremidade do arco atingindo o ponto B , o suporte do raio fica paralelo ao eixo $t't$. Conseqüentemente, a tangente não é definida para o arco $\pi/2$ ou 90° . Ao aproximar-se o arco sempre mais de 90° (ponto M' , fig. 15), a tangente cresce indefinidamente.

Quando o arco ultrapassa 90° (ponto M'' , fig. 15), a tangente torna-se bruscamente negativa, permanecendo infinitamente grande seu valor absoluto. Assim, se representarmos por ϵ um arco que tende para zero ($\widehat{BM'}$ e $\widehat{BM''}$, na figura 15) e por ∞ (infinito) uma variável que cresce indefinidamente, podemos escrever:

$$\tan(90 - \epsilon) = +\infty \quad \text{e} \quad \tan(90 + \epsilon) = -\infty.$$

Escreve-se, também, com o mesmo sentido: $\tan 90^\circ = \pm \infty$.

Quando a extremidade M percorre o segundo quadrante, a tangente varia, então, de $-\infty$ a zero, como se observa na figura.

No terceiro quadrante a variação é igual à do primeiro e no quarto igual à do segundo, não sendo definida quando a extremidade do arco coincidir com o ponto B' .

Conclui-se que a tangente pode receber todos os valores de $-\infty$ a $+\infty$ e varia de acôrdo com o seguinte quadro, onde os traços verticais indicam as interrupções (descontinuidades) do valor da tangente, isto é, os pontos em que não é definida:

POSIÇÃO DE M	A	B	A'	B'	A
Valor do arco x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Valor de $y = \tan x$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$		$0 \nearrow +\infty$

4. Co-tangente.

- a) **Eixo das co-tangentes** — é o eixo $s's$, tangente à circunferência no ponto B , orientado como indica a figura 16 e cujo vetor unitário é equípólente a OA (raio igual à unidade).

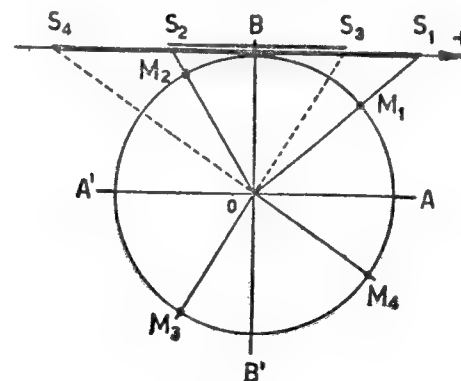


FIG. 16

- b) **Co-tangente de um arco $\widehat{AM}$** é a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{BS}$ (figs. 16) que tem origem em B e extremidade na interseção do eixo $s's$ com o suporte do raio OM da extremidade do arco.

Representa-se pelo símbolo

$$\cot \widehat{AM}.$$

Assim, temos, na figura 16:

$$\cot \widehat{AM}_1 = \overline{BS}_1, \cot \widehat{AM}_2 = \overline{BS}_2; \cot \widehat{AM}_3 = \overline{BS}_3, \cot \widehat{AM}_4 = \overline{BS}_4.$$

- c) **Sinal da co-tangente.** De acôrdo com a orientação do eixo $s's$, conclui-se:

a co-tangente é positiva no 1.º e no 3.º quadrante;
a co-tangente é negativa no 2.º e no 4.º quadrante.

d) **Variação do valor da co-tangente.** De modo análogo ao estudo feito para a tangente a quarta-função circular

$$y = \cot x,$$

onde x é um arco variável, não é definida quando a extremidade M coincide com um dos pontos A ou A' . Conclui-se o quadro de variação:

POSIÇÃO DE M	A	B	A'	B'	A
Valor do arco x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Valor de $y = \cot x$	$+\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$		

5. Periodicidade das funções circulares.

a) **Seno, co-seno, secante e co-secante.** Quando a extremidade do arco $\widehat{AM}$ percorre a circunferência uma segunda vez, coincidirá com os mesmos pontos do primeiro percurso. Assim, os valores das funções se repetem. Diz-se, então, que as funções circulares são *periódicas* e a amplitude do período é 2π ou 360° , traduzindo-se pela equação:

$$f(\alpha) = f(2k\pi + \alpha)$$

onde f representa qualquer das quatro funções consideradas.

b) **Tangente e co-tangente.** A tangente e a co-tangente de dois arcos de extremidades diametralmente opostas são iguais, como se verifica nas figuras 15 e 16. Estas duas funções são, pois, também, periódicas, sendo seus valores repetidos de 180° em 180° , isto é, a amplitude do período é 180° ou π , o que se traduz pela equação:

$$\tan \alpha = \tan (k\pi + \alpha) \quad \text{e} \quad \cot \alpha = \cot (k\pi + \alpha)$$

Exemplos:

$$1.^{\circ} \sin 40^\circ = \sin 400^\circ = \sin 760^\circ = \dots$$

$$2.^{\circ} \tan 1650^\circ = \tan (360^\circ \times 4 + 210^\circ) = \tan 210^\circ = \tan 30^\circ.$$

Observe-se que as funções circulares de um arco qualquer são iguais às da menor determinação; sendo, pois, possível, operar apenas com arcos menores do que 360° . Daí sua utilidade. Assim:

$$\cos 840^\circ = \cos (360^\circ \times 2 + 120^\circ) = \cos 120^\circ$$

6. Funções de arcos complementares. Co-funções. Consideremos o arco $\widehat{AM} = \alpha$. O complemento dêsse arco será $\widehat{MB}$ (fig. 17), ou, transportando a origem para o ponto A :

$$\widehat{AM'} = \widehat{MB} = 90^\circ - \alpha.$$

Tracemos então o seno e o co-seno dos arcos complementares

$\widehat{AM}$ e $\widehat{AM'}$, teremos:

$$(1) \begin{cases} \overline{OP} = \cos \alpha \\ \overline{M'P'} = \sin (90^\circ - \alpha). \end{cases}$$

No triângulo $OM'P'$ temos $\widehat{M'OP'} = 90^\circ - \alpha$, portanto:

$$\hat{M}' = \alpha,$$

e como $\widehat{MOP} = \alpha$, conclui-se: $\hat{M}' = \widehat{MOP}$.

Assim, os triângulos retângulos OMP e $OM'P'$ são iguais por terem hipotenusas iguais ($OM = OM' = R$) e um ângulo agudo igual ($\hat{M}' = \widehat{MOP}$). Da igualdade dos triângulos resulta:

$$OP = M'P',$$

ou, em virtude das igualdades (1):

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$

Isto é: **O co-seno de um arco é igual ao seno de seu complemento.**

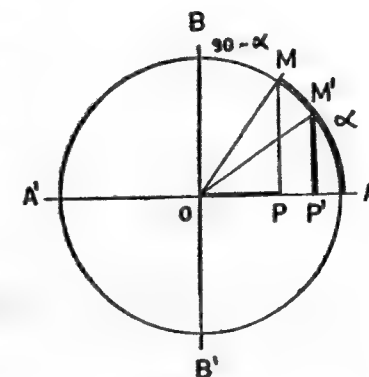


FIG. 17

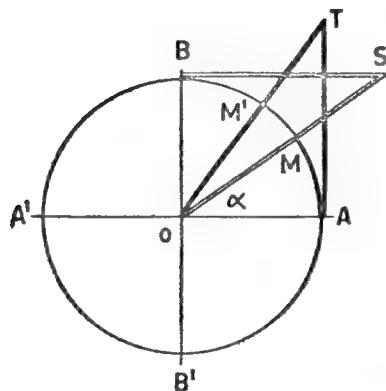


FIG. 18

Analogamente, considerando na figura 18 os arcos :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AM} &= \alpha & \widehat{AM'} &= 90^\circ - \alpha \\ \text{teremos : } \overline{BS} &= \cot \alpha \\ \overline{AT} &= \tan (90^\circ - \alpha) \end{aligned} \right\} (2)$$

E, ainda :

$$\begin{aligned} \triangle OAT &= \triangle OBS \\ \text{por terem um cateto igual} \\ (OA = OB = R) \end{aligned}$$

e um ângulo agudo igual pela mesma razão da figura anterior.

Da igualdade dos triângulos conclui-se

$$BS = AT$$

ou em virtude das igualdades (2) :

$$\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$$

Finalmente, teremos para as duas funções secundárias :

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos (90^\circ - x)} = \sec (90^\circ - x)$$

Isto é: **A co-tangente é igual à tangente do complemento e a co-secante é a secante do complemento.**

Por estas razões o co-seno, a co-tangente e a co-secante de um arco denominam-se **co-funções**.

Exemplos :

$$\cos 28^\circ = \sin 62^\circ, \quad \csc 45^\circ = \sec 45^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ, \quad \cot 20^\circ = \tan 70^\circ$$

$$\csc 60^\circ = \sec 30^\circ, \quad \cot 45^\circ = \tan 45^\circ$$

EXERCÍCIOS

1. Verificar os sinais de: $\sin 1580^\circ$, $\sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\tan 2.008^\circ$, $\cot 2.110^\circ$ e $\sec 1.200^\circ 36'$.
2. Fixar, no círculo trigonométrico, as extremidades do arco x , para os quais se tem: a) $\sin x = 3/5$; b) $\cot x = -1,5$; c) $\cos x = -0,5$; d) $\tan x = 2$.
3. A que quadrantes pode pertencer o arco x , se $\sin x = -\frac{1}{4}$?
4. Em que quadrantes tem-se, simultaneamente: $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$? $\tan x < 0$ e $\sec x > 0$? $\sin x < 0$ e $\cot x < 0$?
5. Quando $\cos x$ varia de -1 a 0 (x crescente), entre que valores varia $\sin x$?
6. Quando $\sin x$ varia de 0 a -1 (x crescente), entre que valores varia $\tan x$?
7. Em que quadrantes é positiva a função $y = -\tan x$?
8. Quais das igualdades: $4 \cos x - 3 = 0$, $2 \sec x + 1 = 0$, $4 \tan x = 3$, $3 \sin x - 5 = 0$, são verdadeiras?
9. Em que quadrantes é positivo o produto $y = \cos x \cdot \cot x$?
10. Em que quadrantes é negativo o produto $\tan x \cdot \sin x$ e $y = \sin x \cdot \cos x$?
11. Verifique o sinal das expressões: a) $x = \frac{\sin 240^\circ \cdot \cos 1410^\circ}{\cot 212^\circ \cdot \sec 47^\circ}$; b) $x = \frac{\sin (-1670^\circ) \times \sec 680^\circ}{\cot (-1000^\circ)}$; c) $x = \frac{\tan 300^\circ \times \sec 150^\circ}{\sin 30^\circ \times \csc 240^\circ}$
12. Se x for um arco do segundo quadrante, qual o sinal da expressão $\frac{\sin x \cos x}{\tan x (\tan x + \cot x)}$?
13. Se x for um arco do quarto quadrante, qual o sinal de $\frac{5 \sec x \cdot \sin x}{\csc x \cdot \tan x}$?
14. Calcular o valor das expressões: a) $\sin 450^\circ - \tan 180^\circ + \cos k \cdot 360^\circ$; b) $\frac{3 \sin 90^\circ - 2 \cos 180^\circ + \sin 270^\circ}{5 \cos 0^\circ + 3 \sin 360^\circ - 2 \cos 90^\circ}$; c) $\frac{\sin 90^\circ + \cos 360^\circ + 2 \sin 270^\circ}{\cos 180^\circ + \tan 180^\circ + \cot 90^\circ}$
15. Calcular: a) $\cos 3x - \sin 2x$ para $x = \pi/2$; b) $\tan 4x + \sin 2x$ para $x = \pi/4$; c) $\sin 3x + \cos 4x - \tan 2x$ para $x = \pi/2$; d) $\cos 2x + \tan 4x + \sin 3x$ para $x = \pi$

16. Quantos arcos existem entre 0° e 7200° , cujo seno vale $2/3$?
17. Escrever a expressão geral dos arcos cujo seno é zero.
18. Escrever a expressão geral dos arcos cujo seno é -1 .
19. Achar a expressão geral dos arcos para os quais se tem: $\cos x = 0$, $\tan x = 0$, $\sec x = 1$, $\csc x = \infty$.
20. Para que valores de n é possível a equação $\cos x = n$?
21. Achar todos os valores de x que satisfazem a equação $\sin(3x - 30^\circ) = 1$.
22. Resolver as equações: $\cos x = -1$, $\cos(2x - 60^\circ) = 0$, $\tan(4x + 120^\circ) = 0$.
23. Resolver a equação $\sec(3x - 20^\circ) = 1$ e dar tôdas as extremidades distintas do arco solução.
24. Achar todos os valores de x para os quais não são definidas as funções $y = \tan(4x - 15^\circ)$; $y = \cot(3x + 208^\circ)$ e $y = \sec(4x - 100^\circ)$.
25. Quais os valores de n que tornam possível a equação $\sin x = \frac{2-3n}{2}$?
26. Quais os valores de x que tornam possível a equação $\sec a = \frac{3-2x}{2}$?
- E os de n que tornam possível $\cos x = \frac{1-2n}{3}$?
27. Achar os valores de x que tornam mínima a função $\csc(2x + 70^\circ)$.
28. Para que valores de x é máxima a função $\sin(2x - 72^\circ)$?
29. Expressir como funções dos arcos complementares: $\sin 56^\circ$, $\cos 18^\circ 20'$, $\tan 23^\circ 17'$, $\sec 38^\circ$, $\csc 15^\circ$, $\cot 45^\circ$.
30. Expressir com funções de arcos menores do que 45° : $\sin 75^\circ$, $\cos 82^\circ 30'$, $\tan 67^\circ 30'$, $\sec 75^\circ$, $\csc 53^\circ 45'$.

R E S P O S T A S :

1. +, +, +, +, -, - 3. 3° e 4° 4. 2° , 4° 5. 0 a -1 6. 0 a ∞
 7. 2° e 4° 8. 1° e 3° 9. 1° e 2° 10. 2° e 3° , 2° e 4° 11. -, +, -
 12. - 13. - 14. a) 2, b) $4/5$, c) 0 15. 0, 1, 0, 1 16. 40 17. $k\pi$
 18. $k \cdot 360^\circ - 90^\circ$ 19. $k \cdot 360^\circ \pm 90^\circ$, $k \cdot \pi$, $2\pi k$, $k\pi$ 20. $-1 \leq n \leq 1$.
 21. $k \cdot 120^\circ + 40^\circ$ 22. $(2k+1)\pi$, $k \cdot 90^\circ + 75^\circ$, $k \cdot 45^\circ - 30^\circ$
 23. $k \cdot 120^\circ + 6^\circ 40'$, $k = 0, 1, 2$.
 24. $k \cdot 45^\circ + 26^\circ 15'$, $k \cdot 60^\circ - 69^\circ 20'$, $k \cdot 45^\circ + 47^\circ 30'$
 25. $0 \leq n \leq 4/3$ 26. $x \geq 2,5$ ou $x \leq 0,5$ e $-1 \leq n \leq 2$ 27. $k \cdot 180^\circ + 10^\circ$
 28. $k \cdot 180^\circ + 81^\circ$ 29. $\cos 34^\circ$, $\sin 71^\circ 40'$, $\cot 66^\circ 43'$, $\csc 52^\circ$, $\sec 75^\circ$,
 $\tan 45^\circ$, 30. $\cos 15^\circ$, $\sin 7^\circ 30'$, $\cot 22^\circ 30'$, $\csc 15^\circ$, $\sec 36^\circ 15'$.

V — RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES CIRCULARES DE UM MESMO ARCO. FÓRMULAS FUNDAMENTAIS

1. **Fórmulas fundamentais.** Entre as seis funções circulares ou linhas trigonométricas de um mesmo arco há cinco relações distintas, denominadas **fórmulas fundamentais**, dada sua importância.

Não pode haver mais de cinco relações distintas entre as seis linhas trigonométricas, pois, se houvesse uma sexta, formariam um sistema de seis equações independentes que permitiriam determinar as seis linhas, ainda que não fôsse dado o valor do arco. Isto equivale a dizer que todos os arcos teriam linhas trigonométricas iguais e é, portanto, absurdo.

2. **Dedução das fórmulas.** Seja M a extremidade de um arco α . Construídas suas linhas trigonométricas ficam formados os três triângulos retângulos semelhantes OPM , OAT e OBS . Temos as relações (fig. 19):

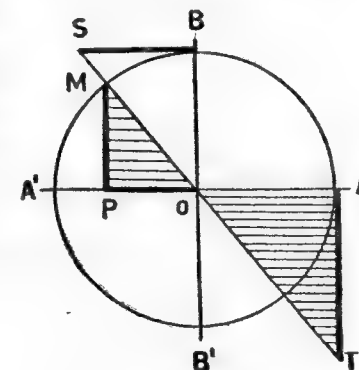


FIG. 19

1.º) No triângulo retângulo OPM , conclui-se:

$$MP^2 + OP^2 = OM^2$$

ou

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

que, abreviadamente, se escreve:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad (1)$$

2.º) Da semelhança dos triângulos OPM e OAT , resulta:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}$$

ou, como nesta proporção figuram os valores absolutos:

$$\left| \frac{\tan \alpha}{1} \right| = \left| \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} \right|.$$

Em virtude da variação do sinal das funções, verifica-se que, em qualquer quadrante, $\tan \alpha$ e o quociente $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ têm o mesmo sinal, e portanto:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

3.ª) Os triângulos semelhantes OPM e OBS permitem concluir:

$$\frac{BS}{OB} = \frac{OP}{MP}$$

ou, por serem BS , OP e MP valores absolutos:

$$\left| \frac{\cot \alpha}{1} \right| = \left| \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right|.$$

Pode-se verificar, como no caso anterior, que a relação é também verdadeira quanto ao sinal, concluindo-se:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3)$$

OBSERVAÇÃO: A co-tangente é o inverso da tangente: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ou $\cot \alpha \cdot \tan \alpha = 1$, como se conclui das relações (2) e (3).

4.ª) e 5.ª) Por definição, temos, finalmente:

$$\boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}} \quad (4) \quad \text{e} \quad \boxed{\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}} \quad (5)$$

3. Conseqüências importantes. Das cinco relações distintas podem ser concluídas várias outras como conseqüências. Duas dessas são de grande importância no cálculo trigonométrico:

1.ª) Dividindo os dois membros da relação (1) por $\cos^2 \alpha$, se $\cos \alpha \neq 0$, vem:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

e, em virtude das relações (2) e (4):

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

ou

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha}$$

2.ª) Dividindo os dois membros da relação (1) por $\sin^2 \alpha$, se $\sin \alpha \neq 0$, vem:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

ou, de acordo com as relações (3) e (5):

$$\boxed{1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha}$$

4. Resumo. Em resumo, temos o quadro das relações fundamentais e suas conseqüências:

Q U A D R O I
Fórmulas fundamentais

FUNDAMENTAIS	CONSEQÜÊNCIAS
$\text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = 1$	$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$
$\tan a = \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a}$	$1 + \cot^2 a = \csc^2 a$
$\cot a = \frac{\text{cos } a}{\text{sen } a} = \frac{1}{\tan a}$	
$\sec a = \frac{1}{\text{cos } a}$	
$\csc a = \frac{1}{\text{sen } a}$	

5. Aplicações.

PRIMEIRA APLICAÇÃO. Dado o valor de uma função circular, achar os valores das outras cinco.

Em primeiro lugar observemos que, em virtude das três últimas fórmulas fundamentais, a co-tangente é o inverso da tangente, a secante do co-seno e a co-secante do seno. As seis funções formam, portanto, três pares de valores inversos:

seno — co-secante co-seno — secante tangente — co-tangente

Assim, no problema do cálculo dos valores das funções, podemos considerar apenas o seno, o co-seno e a tangente. As outras três serão obtidas, invertendo os valores das três

primeiras. Dê-se modo, os problemas serão resolvidos pelo sistema:

$$\begin{cases} \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \\ \tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \end{cases}$$

Exemplos.

1.º) Dado $\text{sen } x = 3/5$, calcular as outras funções do arco x .

Substituindo o valor do seno no sistema das duas primeiras relações, vem:

$$\begin{cases} \frac{9}{25} + \text{cos}^2 x = 1 \\ \tan x = \frac{3/5}{\text{cos } x} \end{cases}$$

A primeira dá:

$$\text{cos}^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \therefore \text{cos } x = \pm \frac{4}{5}$$

Substituindo o valor de $\text{cos } x$ na segunda:

$$\tan x = \frac{3}{\pm \frac{4}{5}} \therefore \tan x = \pm \frac{3}{4}$$

Invertendo os três valores, obtemos as outras funções:

$$\csc x = \frac{5}{3}; \sec x = \pm \frac{5}{4}; \cot x = \pm \frac{4}{3}$$

OBSERVAÇÃO. Dado apenas o valor do seno, sem qualquer indicação sobre o arco, o problema admite duas soluções, como se verifica pelos duplos sinais encontrados. Isto porque, sendo $\text{sen } x = \frac{3}{5}$, o arco x pode ser do primeiro ou do segundo quadrante. Na segunda hipótese, apenas o seno e a co-secante são positivas.

O problema terá solução única se for dada a função e, também, o valor do arco ou, pelo menos, o quadrante em que se encontra.

2.º) Dado $\text{cos } x = -\frac{5}{13}$ e x do segundo quadrante, achar as outras funções de x .

Neste exemplo, o arco dado é do segundo quadrante; logo, apenas $\text{sen } x$ e $\csc x$ serão positivas. Substituindo o valor dado no mesmo sistema anterior, teremos:

$$\text{sen}^2 x + \frac{25}{169} = 1 \text{ ou } \text{sen}^2 x = \frac{144}{169}$$

donde, por ser positivo : $\sin x = \frac{12}{13}$

$$\text{E daí: } \tan x = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

Invertendo os três valores, obtemos as outras funções:

$$\sec x = -\frac{13}{5}; \quad \csc x = \frac{13}{12} \quad \text{e} \quad \cot x = -\frac{5}{12}.$$

χ 3.º) Dado $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$, achar as outras funções de 240° .

O arco é do terceiro quadrante e são positivas apenas a tangente e co-tangente.

É mais simples, quando é dada a tangente, utilizar a primeira consequência: $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$.

$$\text{Resulta: } 1 + 3 = \sec^2 240^\circ$$

$$\text{donde: } \sec 240^\circ = -2.$$

$$\text{Invertendo, temos: } \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Observando, pela segunda fórmula, que o seno é o produto do co-seno pela tangente, vem:

$$\sin 240^\circ = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclui-se, finalmente, invertendo os valores do seno e da tangente:

$$\csc 240^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 240^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.º) Dado $\sec x = -\frac{13}{5}$, achar as outras funções:

O valor inverso será:

$$\cos x = -\frac{5}{13}.$$

Temos, assim, problema idêntico ao do 2.º exemplo.

Analogamente, sendo os dados a co-secante ou a co-tangente, teremos problemas respectivamente idênticos aos do primeiro e terceiro exemplos:

SEGUNDA APLICAÇÃO. Expressão das linhas trigonométricas de um arco em função de uma delas.

1.º) Achar $\cos x$ e $\tan x$ em função de $\sin x$.

Teremos o sistema das duas primeiras relações:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

A primeira dá:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Substituindo na segunda:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

As outras três seriam obtidas, por inversão.

2.º) Achar $\sin x$ e $\tan x$ em função de $\cos x$.

Temos, do mesmo sistema:

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

3.º) Achar $\sin x$ e $\cos x$ em função de $\tan x$.

$$\sec x = \pm \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

Logo:

$$\cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

E, como $\sin x$ é o produto $\cos x \cdot \tan x$:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

TERCEIRA APLICAÇÃO. Verificação de identidades.

Há um grande número de identidades entre as funções circulares. Para verificá-las, usamos as fórmulas ou identidades fundamentais do quadro I.

Para verificar uma identidade, podemos proceder de duas maneiras:

- 1.º) Transformamos, sucessivamente, um dos membros, até obter o outro membro.
- 2.º) Transformamos, sucessivamente, os dois membros, até obter a mesma expressão ou o mesmo número.

Exemplo.

Verificar a identidade: $\tan x + \cot x \equiv \sec x \cdot \csc x$.

Resolução.

Transformando o primeiro membro, de acordo com as fórmulas do Quadro I:

$$\tan x + \cot x \equiv \sec x \cdot \csc x.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} &= \\ \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} &= \\ \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} &= \\ \sec x \cdot \csc x. \end{aligned}$$

Analogamente, poderíamos transformar o segundo membro, até obter o primeiro:

$$\tan x + \cot x \equiv \sec x \cdot \csc x =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} &= \\ \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} &= \\ \frac{\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} &= \\ \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} &= \\ \tan x + \cot x. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

1. Sendo $\sin x = -0,8$ e x do 3.º quadrante, calcular as demais linhas do arco x .
2. Sendo $\csc 1590^\circ = 2$, calcular as demais linhas de 1590° .
3. Sendo $\tan a = -\sqrt{3}$, dizer os quadrantes do arco a e calcular $\sin a$ e $\cos a$.
4. Sendo $\tan a = \frac{3}{4}$ e a do 3.º quadrante, calcular $\sin a$ e $\cos a$.
5. Achar $\sin a$ e $\tan a$ sabendo que: 1.º) $\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (a do 2.º quadrante; 2.º) $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (a do 4.º quadrante).
6. Achar $\sin a$ e $\cos a$, sendo $\cot a = -2$ e a do 2.º quadrante.
7. Achar $\sin a$, $\cos a$, e $\tan a$, sendo $\sec a = -\frac{13}{12}$ e a do 3.º quadrante.
8. Calcule o valor de $x = \frac{\sec a - \csc a}{1 - \cot a}$, sendo $\cos a = 1/2$ e a do 4.º quadrante.
9. Sendo $\csc x = -2$ e x do 3.º quadrante, calcular $\cos x$ e $\tan x$.
10. Calcular $\frac{2 \sin x + \tan x}{2 \cos x - \cot x}$, sendo x do 1.º quadrante e $\csc x = \sqrt{2}$.
11. Sendo $\sin a + \cos a = 0,5$ calcule $\sin a \times \cos a$.
12. Sendo $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ e a do 1.º quadrante, calcular $\tan a$.
13. Sendo $3 \tan a + 5 \cot a = 8$, calcule $\tan a$.
14. Escrever, em função de $\sin a$, a expressão: $x = \frac{\sec a - \cos a}{\sec a + \tan a}$.
15. Escrever, em função apenas de $\cos a$, a expressão: $(1 - \sin a \cdot \cos a)(1 + \sin a \cdot \cos a) - \cot a \cdot \sin a \cdot \cos^2 a$.
16. Escrever em função de $\tan a$: $\frac{\sec a - \cos a}{\csc a - \sin a}$.
17. Achar os valores de x que verificam simultaneamente as igualdades: $\sin a = x + 2$ e $\cos a = \sqrt{1 - x^2}$.
18. Achar os valores de x que verificam simultaneamente as igualdades: $\tan a = 2x + 3$ e $\cot a = x + 1$.
19. Achar os valores de x que verificam simultaneamente as igualdades: $\tan a = \frac{x + 1}{2}$ e $\sec a = \sqrt{x + 2}$.

Demonstre as identidades:

20. $\sec x - \cos x \equiv \sec x \cdot \tan x$
21. $(1 + \tan x)^2 + (1 + \cot x)^2 \equiv (\sec x + \csc x)^2$
22. $\tan a + \cot a \equiv \sec a \cdot \csc a$
23. $\sec^2 a \cdot \csc^2 a \equiv \sec^2 a + \csc^2 a$
24. $(1 + \tan x)(1 + \cot x) \equiv 2 + \sec x \cdot \csc x$
25. $\sin^4 x - \cos^4 x \equiv \sin^2 x - \cos^2 x$
26. $\frac{1 - 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \equiv \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
27. $\cot a \cdot \cos a \equiv \csc a - \sin a$
28. $\frac{1 + \tan a}{1 - \tan a} \equiv \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
29. $(1 - \cos a)(\csc a + \cot a) \equiv \sin a$
30. $\frac{\cot a}{1 + \cot^2 a} \equiv \sin a \cdot \cos a$
31. $(1 + \tan a)(1 - \tan a) \equiv 2 - \sec^2 a$
32. $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \equiv 1 + 2 \tan^2 x$. (Fil. C.L.U. Paraná - 1951)
33. $\frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} \equiv \tan x \cdot \sec x$ (Fil. C.L.U. Paraná - 1951)
34. Calcule $\tan x$, sabendo que $\cos x = -\frac{1}{5}$ e que x é do 3.º quadrante.
35. Verificar que a expressão $\sin^4 x - \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ é independente de x .

R E S P O S T A S:

1. $-0,6$; $\frac{4}{3}$ 2. $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3. $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{4}{5}$
5. 1.º) $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2.º) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1 6. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 7. $-\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$ e $\frac{5}{12}$
8. 2 9. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 10. $3+2\sqrt{2}$ 11. $-\frac{3}{8}$ 12. 1 13. 1 e $\frac{5}{3}$
14. $\frac{\sin^2 a}{1 + \sin a}$ 15. $1 - \cos^2 a$ 16. $\tan^2 a$ 17. -1 18. $-2e-0,5$
19. 3 e -1 34. $2\sqrt{6}$ 35. 0.

VI — CÁLCULO DAS LINHAS DOS ARCOS

DA FORMA $\frac{\pi}{n}$.

1. Teorema.

O seno de um arco positivo e menor que 90° , é igual à metade da corda do arco duplo.

Demonstração.

Seja $\widehat{AM} = a$ (fig. 20) e M' o simétrico de M em relação a AA' .

Temos, considerando os arcos geométricos

$$\widehat{AM} = \widehat{AM'} \therefore \widehat{MM'} = 2a$$

E, por outro lado:

$$\overline{MM'} = 2\overline{MP} = 2 \sin a.$$

$$\text{Logo: } \sin a = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM'}$$

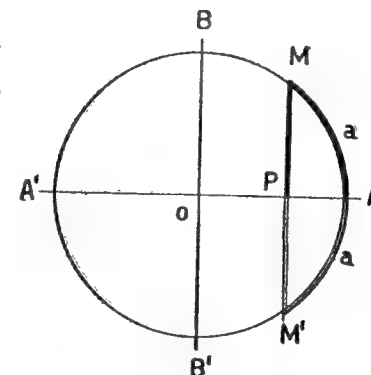


FIG. 20

ou

$$\sin a = \frac{1}{2} \text{ corda } 2a$$

$$(0 < a < \frac{\pi}{2})$$

2. Aplicação. Cálculo das linhas dos arcos de 30° , 45° e 60°

As cordas dos arcos de 60° , 90° e 120° , são respectivamente os lados do hexágono, do quadrado e do triângulo:

$$l_6 = R, \quad l_4 = R\sqrt{2} \quad \text{e} \quad l_3 = R\sqrt{3}.$$

Em virtude do teorema anterior, as metades dessas cordas serão os senos de 30° , 45° e 60° . E, como o raio é 1, conclui-se:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o co-seno é o seno do complemento, concluímos, imediatamente: $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ e $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$, isto é:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Dividindo, membro a membro, obteremos as tangentes:

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan 45^\circ = 1 \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

OBSERVAÇÃO. Análogamente obteremos as funções circulares de um arco qualquer da forma $\frac{\pi}{n}$:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \text{ corda } \frac{2\pi}{n},$$

desde que n seja inteiro e conheçamos o lado do polígono de n lados, pois, em todos os casos será:

$$\frac{1}{2} \text{ corda } \frac{2\pi}{n} = \frac{ln}{2}$$

EXERCÍCIOS

Achar o valor do ângulo agudo a nas seguintes igualdades:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sin a = 0,5$ | 2. $2 \cos a = \sqrt{3}$ | 3. $\sin^2 a = \frac{1}{2}$ |
| 4. $\sec a = \sqrt{2}$ | 5. $4 \sin^2 a = 3$ | 6. $\csc a = 2$ |
| 7. $3 \cot a = \sqrt{3}$ | 8. $5 \tan^2 a - 5 = 0$ | 9. $2 \cos^2 a = 1$ |
| 10. $\cot a = 1$ | 11. $\tan^2 a = 3$ | 12. $2 \sec a = 4$ |

Calcular os valores das expressões:

13. $\tan 45^\circ + 8 \cos^2 30^\circ - 3 \sec 60^\circ$
14. $\frac{6 \tan 30^\circ - 4 \sin 60^\circ + 3 \sec^2 30^\circ}{\csc 30^\circ + \cot 45^\circ - 5 \cos 60^\circ}$
15. $\frac{3 \tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ - 3 \cot 60^\circ}{\sin 30^\circ + 3 \sin^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ}$

R E S P O S T A S :

- | | | | | |
|----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|
| 1. 30° | 2. 30° | 3. 45° | 4. 45° | 5. 60° |
| 6. 30° | 7. 60° | 8. 45° | 9. 45° | 10. 45° |
| 11. 60° | 12. 60° | 13. 1 | 14. 8 | 15. $-0,5$ |

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

1. Reduzir ao 1.º quadrante os arcos $956^\circ 18' 43''$ e $-\frac{16\pi}{3}$ (E.P.U.C. — Rio, 1950)
2. Qual o valor da expressão $\frac{1 + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{cost}}$ para $t = 0$? (E. N. Arq. — Rio, 1948) *Resp.: ∞ .*
3. Achar o valor da expressão $\frac{\sin(30^\circ + x) + \cos^2 3x}{\operatorname{tg}(x - 15^\circ)} + \operatorname{tg} \frac{x - 60^\circ}{2}$ para $x = 60^\circ$. (E. N. Arq. — Rio, 1949) *Resp.: 2.*
4. Os arcos positivos, menores que 540° , cuja tangente é $-\sqrt{3}/3$ são.... (E. P. U. C. — Rio, 1957) *Resp.: $150^\circ, 330^\circ, 510^\circ$.*
5. O $\cos \frac{29\pi}{4}$ rd tem para valor..... (E. P. U. C. — Rio, 1957)
Resp.: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. A função $y = \operatorname{tg} x$ é descontínua para arcos cuja expressão geral é..... (E.P.U.C. — Rio, E. Flu. E. — 1957) *Resp.: $k\pi + \frac{\pi}{2}$.*
7. $\cotg \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots$ (E. Flu. E. — 1957) *Resp.: -1 .*
8. A expressão de todos os arcos cujo co-seno é $-\frac{1}{2}$ é..... (E. Flu. E. — 1957)
9. Calcule o co-seno do ângulo diedro formado por duas faces que têm uma aresta comum, de um octaedro regular (E.P.U.C. — Rio, 1957)
Resp.: $-\frac{1}{3}$

10. Calcule $\sin^2 a$ e $\cos^2 a$, sabendo que $\operatorname{tg} a = 1 + \sqrt{2}$ (E. E. Juiz de Fora — 1951)

$$\text{Resp.: } \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ e } \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

11. São dados quatro ângulos em progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{2}$.

Mostrar que a soma das potências n dos co-senos desses ângulos será $S = 2(\cos^n a + \sin^n a)$ para $n = 2k$ e $S = 0$ para $n = 2k + 1$. (E. Eng. U. Recife — 1955) *

12. Quais os valores de x para os quais existe $\cos a = x^2 - 5x + 4$? (E. Eng. U. C. — São Paulo, 1952) Resp.:

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \quad \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

14. Achar todos os arcos compreendidos entre 400° e 900° e que tenham tangente igual a 1 (F. Fil. U.D.F. — Rio, 1945).

Resp.: 405° , 585° e 765° .

15. Calcular $\sin 1470^\circ$ e $\operatorname{tg} 1485^\circ$ (F. Fil. U.D.F. — Rio, 1946).

$$\text{Resp.: } \frac{1}{2} \text{ e } 1$$

16. Sabendo que $\operatorname{tg} a = 3/4$, calcular $\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{csc} a$ (F. Fil. U.D.F., 1947).

17. Sendo $\sec x = -2$ e x do 2.º quadrante, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ (E. Aer.

$$- 1945). \text{ Resp.: } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } -\sqrt{3}$$

- † 18. A expressão geral dos arcos para os quais a função co-secante é descontínua é..... (E.P.U.C. — 1958) Resp.: $x = k\pi$.

19. Calcule o valor de $\left(\sin \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4}\right) \left[\cos \frac{17\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\right]$

(E.P.U.C. — Rio, 1958). Resp.: 0.

20. Calcule as expressões gerais de x , tais que $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ (E.P.U.C. — Rio, 1958)

$$\text{Resp.: } 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \text{ e } 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{12}.$$

21. A expressão geral dos arcos para os quais se tem $\sin x = \operatorname{tg} x$ é.... (E.P.U.C. — Rio, 1958).

UNIDADE V

I — ARCOS DE EXTREMIDADES ASSOCIADAS. APLICAÇÕES.

1. Arcos côngruos. Extremidades em coincidência.

Se as extremidades de dois arcos, de medidas a e b , coincidem, diz-se que os arcos são **côngruos** e representa-se pela notação

$$a \equiv b$$

Na realidade, dois arcos côngruos são duas determinações de um mesmo arco $\widehat{AM_1}$ (fig. 21) e, portanto, *diferem de um número inteiro de circunferências*. Assim, se fôr α a menor determinação de um deles, b , por exemplo, a expressão geral dos arcos a , côngruos com b , será:

$$a = 2k\pi + \alpha \quad (1)$$

Exemplo:

A expressão geral de todos os arcos côngruos com 1.570° , cuja menor determinação é 130° , será:

$$a = k \cdot 360^\circ + 130^\circ.$$

2. Arcos de extremidades associadas. Dois arcos de mesma origem têm extremidades associadas, quando estas extremidades são simétricas em relação ao centro ou a um dos eixos, $A'A$ ou $B'B$.

(*) Solução do Prof. SIDRAX HOLANDA DE Recife em "Atualidades Pedagógicas".

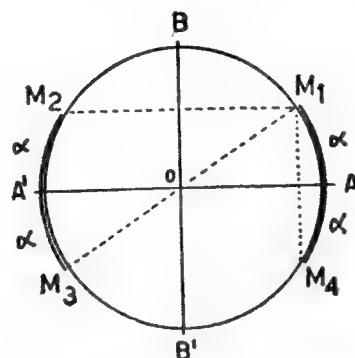


FIG. 21

Assim, na figura 21, os arcos $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$, $\widehat{AM_3}$ e $\widehat{AM_4}$ têm as extremidades associadas.

Das propriedades da circunferência conclui-se facilmente, na figura 21, a igualdade dos arcos geométricos de medida α , isto é:

$$\widehat{AM_1} = \widehat{M_2A'} = \widehat{A'M_3} = \widehat{M_4A}.$$

Dê-se modo, se considerarmos uma primeira circunferência, os arcos associados a $\widehat{AM_1} = \alpha$ serão (fig. 21):

- 1.º) O suplemento: $\widehat{AM_2} = 180^\circ - \alpha$
- 2.º) O explemento(*): $\widehat{AM_3} = 180^\circ + \alpha$
- 3.º) O replemento: $\widehat{AM_4} = 360^\circ - \alpha$

Se considerarmos os arcos generalizados, as expressões gerais dos arcos de extremidades associadas a $\widehat{AM_1}$, cuja menor determinação é α serão:

- 1.º) Arcos de extremidade simétrica em relação a $B'B$:

$$\widehat{AM_2} = k \cdot 360^\circ + (180^\circ - \alpha)$$

- 2.º) Arcos de extremidade simétrica em relação ao centro:

$$\widehat{AM_3} = k \cdot 360^\circ + (180^\circ + \alpha)$$

- 3.º) Arcos de extremidade simétrica em relação a $A'A$:

$$\widehat{AM_4} = k \cdot 360^\circ + (360^\circ - \alpha)$$

ou, mais simplesmente:

$$\widehat{AM_4} = k \cdot 360^\circ - \alpha.$$

(*) Arcos explementares são dois arcos da forma α e $180^\circ + \alpha$ que diferem de 180° . O explemento de 30° é $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ e o de 210° é $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$.

A denominação encontra-se em PALATINI — *Geometria* (1920) e na *Trigonometria Plana* de APRILE e SCIUTO (Torino — 1948) e nos parece muito adequada e útil (Cfr. Aprile Sciuto).

Exemplos:

- 1.º) As menores determinações dos arcos associados ao arco de 60° são:

- a) suplemento: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
- b) explemento: $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$
- c) replemento: $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

- 2.º) O arco do primeiro quadrante associado a 225° é o explemento: $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$.

- 3.º) Achar o menor arco do primeiro quadrante associado a 1.560° .

Temos: $1.560^\circ = 360^\circ \times 4 + 120^\circ$

A menor determinação é 120° e o associado é o suplemento. Assim, temos:

$$1.560^\circ = 120^\circ \rightarrow 60^\circ$$

A seta indica o arco associado e, com este significado, será usada em todos os exercícios subsequentes.

3. Relações entre as funções dos arcos associados.

As funções circulares dos arcos de extremidades associadas têm o mesmo valor absoluto.

Consideremos os quatro arcos associados $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_2}$, $\widehat{AM_3}$ e $\widehat{AM_4}$ (fig. 22).

Tracemos as cordas M_1M_4 e M_2M_3 dos pontos simétricos. A figura permite concluir, em virtude das propriedades da circunferência:

$$M_1P = M_2P' = M_3P' \parallel M_4P$$

$$\text{ou } |\sin \widehat{AM_1}| = |\sin \widehat{AM_2}| = |\sin \widehat{AM_3}| = |\sin \widehat{AM_4}|.$$

E, portanto, os senos têm o mesmo valor absoluto. Como

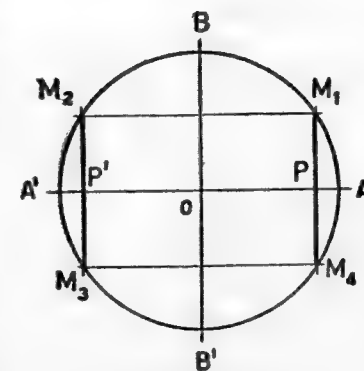


FIG. 22

pelas fórmulas fundamentais, do valor do seno decorrem os valores de tôdas as outras funções, conclui-se que estas terão, respectivamente, os mesmos valores absolutos, o que demonstra o teorema.

4. Consequências. Se observarmos os sinais das funções circulares em cada um dos quadrantes e utilizarmos o último teorema, concluiremos imediatamente as seguintes consequências:

1.ª) *Arcos côngruos têm as linhas respectivamente iguais*

Exemplo: De $765^\circ \equiv 45^\circ$, conclui-se: $\sin 765^\circ = \sin 45^\circ$, $\cos 765^\circ = \cos 45^\circ$, etc.

2.ª) *Arcos suplementares e, de modo geral, de extremidades simétricas em relação a B'B, têm senos e co-secantes iguais.* As demais linhas são simétricas.

Exemplos.

1.º) De $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, conclui-se:

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$, $\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ$.

2.º) $\sin (180^\circ - a) = \sin a$, $\cos (180^\circ - x) = -\cos x$, $\tan (180^\circ - y) = -\tan y$

3.ª) *Arcos explementares e, de modo geral, de extremidades simétricas em relação ao centro têm tangentes e co-tangentes iguais.* As demais linhas são simétricas.

Exemplo.

De $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$, conclui-se: $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$, $\tan 210^\circ = \tan 30^\circ$, etc.

4.ª) *Arcos replementares ou opostos (a e -a) têm co-senos e secantes iguais.* As demais linhas são simétricas.

Exemplos:

1) O replemento de 300° é 60° . Conclui-se:

$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ$, $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$, $\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ$

2) $\sin (-a) = -\sin a$, $\cos (-a) = \cos a$, $\tan (-a) = -\tan a$.

OBSERVAÇÃO. É sempre útil ter em mente a figura 21, para atentar nos sinais das linhas, evitando o recurso exagerado à memória.

5. Resumo. As relações entre os arcos associados e entre as funções circulares dêsses mesmos arcos podem ser resumidas no seguinte quadro, onde x representa os arcos associados a um arco, cuja menor determinação é α :

Q U A D R O I I

Arcos de extremidades associadas

ASSOCIAÇÃO	RELAÇÃO	LINHAS IGUAIS
Congruência	$x = 2k\pi + \alpha$	Tôdas
Sim. rel. BB'	$x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$	sen csc
Sim. rel. O	$x = 2k\pi + (\pi + \alpha)$	tan cot
Sim. rel. AA'	$x = 2k\pi - \alpha$	cos sec

6. Aplicações.

PRIMEIRA. Redução de um arco ao primeiro quadrante.

Reduzir um arco ao primeiro quadrante é achar o arco positivo e menor que 90° , cujas linhas tenham valores absolutos respectivamente iguais às do arco dado.

De acôrdo com o teorema estudado, conclui-se, então, que o problema se reduz a achar o arco associado, menor que 90° .

Simbolicamente, a operação pode traduzir-se:

$$x \equiv a \rightarrow \alpha \text{ (} x \text{ côngruo com } a, \text{ associado a } \alpha \text{)}$$

ou

$$x \rightarrow \alpha \text{ (quando } x < 360^\circ \text{)}$$

O arco a dá o quadrante e, portanto, o sinal da linha. O associado, α , dá o valor absoluto da linha. É sempre conveniente ter em mente a figura 21.

Exemplos.

1.º) Reduzir ao primeiro quadrante o arco de 345° Temos: $345^\circ \rightarrow 15^\circ$ (replemento)No quarto quadrante, a linha positiva é o co-seno. Conclui-se:
 $\text{sen } 345^\circ = -\text{sen } 15^\circ$; $\text{cos } 345^\circ = \text{cos } 15^\circ$; $\text{tan } 345^\circ = -\text{tan } 15^\circ$.2.º) Reduzir ao primeiro quadrante $858^\circ 30'$.Temos: $858^\circ 30' \equiv 138^\circ 30'$ (2.º q.) $\rightarrow 180^\circ - 138^\circ 30' = 41^\circ 30'$ (supl.)

O arco é do segundo quadrante. A linha positiva é o seno:

 $\text{sen } 858^\circ 30' = \text{sen } 41^\circ 30'$; $\text{cos } 858^\circ 30' = -\text{cos } 41^\circ 30'$; $\text{tan } 858^\circ 30' = -\text{tan } 41^\circ 30'$.3.º) Reduzir ao primeiro quadrante 930° .Temos: $930^\circ \equiv 210^\circ$ (3.º q.) $\rightarrow 30^\circ$ (explemento).

No terceiro quadrante o seno e o co-seno são negativos; a tangente é positiva:

 $\text{sen } 930^\circ = -\text{sen } 30^\circ$; $\text{cos } 930^\circ = -\text{cos } 30^\circ$; $\text{tan } 930^\circ = \text{tan } 30^\circ$.4.º) Reduzir ao primeiro quadrante 1.380° .Temos: $1.380^\circ \equiv 300^\circ \rightarrow 60^\circ$ (replemento)

Arco do 4.º quadrante. A linha positiva é o co-seno:

 $\text{sen } 1.380^\circ = -\text{sen } 60^\circ$; $\text{cos } 1.380^\circ = \text{cos } 60^\circ$; $\text{tan } 1.380^\circ = -\text{tan } 60^\circ$

SEGUNDA APLICAÇÃO. Arcos negativos.

Um arco negativo $-a$ tem extremidade simétrica à do arco oposto $+a$, em relação ao eixo $A'A$. Logo, conclui-se de acôrdo com as relações do quadro II:

$\text{sen } (-a) = -\text{sen } a$
$\text{cos } (-a) = \text{cos } a$
$\text{tan } (-a) = -\text{tan } a$

e	$\text{csc } (-a) = -\text{csc } a.$
e	$\text{sec } (-a) = \text{sec } a.$
e	$\text{cot } (-a) = -\text{cot } a.$

Exemplo:

Calcular as funções circulares de -60°

Temos: $\text{sen } (-60^\circ) = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cos } (-60^\circ) = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{tan } (-60^\circ) = -\text{tan } 60^\circ = -\sqrt{3}$

II — FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS.

7. Arcos que correspondem a um seno dado. Seja o problema: O seno de um arco é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Achar o arco.O arco do 1.º quadrante de seno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é 45° .

Os demais, terão o seno igual; logo, de acôrdo com o quadro II, serão:

$360^\circ k + 45^\circ$

e $360^\circ k + (180^\circ - 45^\circ) = 360^\circ k + 135^\circ$.

De um modo geral, dado um seno igual a n , os arcos correspondentes, $\widehat{AM_1}$ e $\widehat{AM_2}$, serão (veja fig. 23), de acôrdo com o quadro II, sendo α o menor:

$\widehat{AM_1} = 2k\pi + \alpha$ $\widehat{AM_2} = 2k\pi + (\pi - \alpha).$	(1)
--	-----

As mesmas expressões terão os arcos que correspondem a uma **co-secante dada**.Achar o arco que corresponde a um seno dado, igual a n , é o mesmo que resolver a equação:

$\text{sen } x = n \quad (-1 \leq n \leq 1)$

cujas soluções são portanto da forma:

$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x = 2k\pi + (\pi - \alpha).$

Tais arcos x são "arcos cujo seno é n " e que também se indicam com a forma:

$x = \text{arc sen } n.$

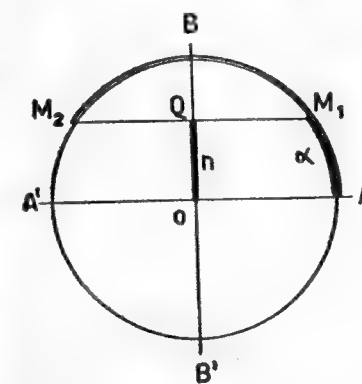
Lê-se: x é o arco cujo seno é n . A relação escrita com esta forma denomina-se **função circular inversa**.

FIG. 23

Assim, escrever : $x = \arcsin \frac{1}{2}$ é o mesmo que escrever : $\sin x = \frac{1}{2}$ donde: $x = k 360 + 30$ ou $k 360 + 150$

Para indicar apenas a menor determinação da função inversa escreve-se **Arc sen** $\frac{1}{2}$.

Assim : $\text{Arc sen } \frac{1}{2} = 30^\circ$

8. Arcos que correspondem a um co-seno dado.
Função : $y = \arccos x$.

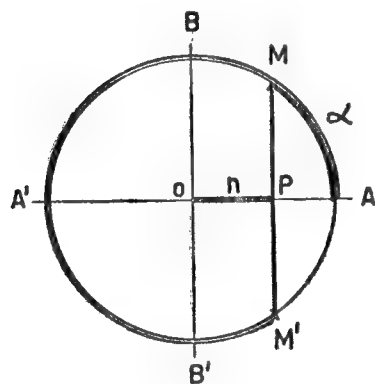


FIG. 24

Os arcos cujo co-seno é um número dado n , (fig. 24) são os arcos côngruos com α e os de extremidade simétrica a de α em relação ao eixo $A'A$ isto é, os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AM'}$. Logo, em virtude das relações do Quadro II, suas expressões gerais serão :

$$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x = 2k\pi - \alpha$$

isto é :

$$x = 2k\pi \pm \alpha \quad (2)$$

As mesmas expressões terão os arcos que correspondem a uma **secante dada**.

Exemplo.

$$\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = k 360^\circ \pm 30^\circ$$

9. Função $y = \arctan x$.

Se a tangente é n , os arcos correspondentes serão os arcos côn-

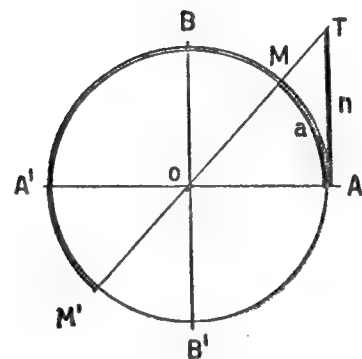


FIG. 25

gruos e os diametralmente opostos ao arco α (fig. 25) e cujas expressões gerais serão (Quadro II) :

$$x = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\pi + \alpha,$$

isto é :

$$x = k\pi + \alpha \quad (3)$$

Exemplo : $\arctan 1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

EXERCÍCIOS

1.º) Resolver a equação : $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Resolução.

O co-seno é negativo ; logo, o arco x é do segundo ou do terceiro quadrante e seu associado do primeiro quadrante é 60° . Assim, o menor arco positivo, cujo co-seno é $-\frac{1}{2}$ é o suplemento de 60° , isto é :

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

As soluções da equação são, pois (igualdade 2):

$$x = 360^\circ \cdot k \pm 120^\circ$$

2.º) Achar os valores da função inversa $x = \arctan \sqrt{3}$.

Resolução.

Com a forma direta escreve-se : $\tan x = \sqrt{3}$.

A menor determinação do arco x é 60° . Logo, os valores do arco x são dados pelas expressões (relação 3) :

$$x = 180^\circ k + 60^\circ$$

✓ 3.º) A unidade sendo o radiano, resolver a equação:

$$\operatorname{sen} \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} x.$$

Resolução:

Os dois arcos $4x - \frac{\pi}{3}$ e x têm senos iguais; logo, de acôrdo com

o Quadro II, duas hipóteses podem ocorrer:

1.ª hipótese: os arcos são côngruos.

Nesta hipótese temos:

$$4x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x$$

donde, sucessivamente:

$$12x - \pi = 6k\pi + 3x$$

$$9x = 6k\pi + \pi$$

$$x = k \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9}.$$

2.ª hipótese: os arcos tem extremidades simétricas em relação a BB' .

Assim, concluiremos:

$$4x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x$$

donde, sucessivamente:

$$12x - \pi = 6k\pi + 3\pi - 3x$$

$$15x = 6k\pi + 4\pi$$

$$x = k \cdot \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{15}$$

✗ 4.º), Achar os valores de x que satisfazem à igualdade:

$$\operatorname{arc} \tan (7x - 1) = \operatorname{arc} \sec (2x + 1).$$

Seja α o arco dos dois membros que são iguais:

$$\operatorname{arc} \tan (7x - 1) = \alpha$$

$$\operatorname{arc} \sec (2x + 1) = \alpha$$

Passemos as funções para a forma direta:

$$\tan \alpha = 7x - 1$$

$$\sec \alpha = 2x + 1$$

Assim, por ser

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha,$$

podemos concluir a equação:

$$1 + (7x - 1)^2 = (2x + 1)^2$$

ou

$$1 + 49x^2 - 14x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

Dai, a equação do segundo grau:

$$45x^2 - 18x + 1 = 0,$$

cujas raízes são $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{15}$, satisfazendo ambas à equação dada, como é fácil verificar.

EXERCÍCIOS

1. Reduzir ao primeiro quadrante: $\tan 150^\circ$, $\operatorname{sen} 240^\circ$, $\cos 300^\circ$, $\sec 225^\circ$, $\operatorname{sen} 1.568^\circ$, $\tan 1.410^\circ 28'$, $\cot (-1.920^\circ 27')$, $\operatorname{sen} (-1.190^\circ)$, $\operatorname{sen} (-1.290^\circ)$.
2. Calcular: $\tan 1.920^\circ$, $\cot 2.760^\circ$, $\cot 3.000^\circ$, $\tan 315^\circ$, $\sec \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{11\pi}{4}$.
3. Simplifique a expressão: $\operatorname{sen} (180 + x) + 3 \operatorname{sen} (-x) + 2 \cos (90 - x)$.
4. Simplifique o mais possível: $\tan (1.440^\circ - x) + 2 \tan (900 + x) - \cot (450^\circ - x)$.
5. Simplifique: $\frac{\tan (\pi + a) + \cot (2\pi - a) + \tan (90^\circ - a)}{\tan (200 \text{ gr} - a) \cdot \cot (90^\circ - a)}$.
6. Simplifique: $\frac{\operatorname{sen} (180 - x) + \cos (90 - x)}{\tan (360 - x) \cdot \cos (180 + x)}$.
7. Simplifique: $\frac{a \operatorname{sen} (180 + x) + b \cos x + a \cos (90 - x)}{b \operatorname{sen} (180 - x)}$.
8. Calcular o valor da expressão $\frac{\cos 765^\circ - \operatorname{sen} 1.395^\circ}{\sec 1740^\circ}$.
9. Calcular $\frac{\operatorname{sen} 1.560^\circ - \cos 1.650^\circ}{\tan 315^\circ}$.
10. Calcule o valor de $\operatorname{sen} x$, sabendo que $\cot \left(\frac{x}{2} - 30^\circ \right)$ é descontínua.
11. Calcule $\frac{\tan 1.560^\circ \times \sec 1.410^\circ}{\cos 1.650^\circ \times \operatorname{sen} 690^\circ}$.
12. Calcule $\frac{\operatorname{sen} (-1.680^\circ) \times \tan (-1.230^\circ)}{\cot 675^\circ + \cos (-1.200^\circ)}$.

13. Calcule $\frac{\sin(-1.320^\circ) + \cos 840^\circ}{\tan(-1.395^\circ)}$

14. Calcule $\frac{\sec(-300^\circ) + \tan 945^\circ}{\cos 210^\circ \times \cot 1.950^\circ}$

15. Entre 0° e 360° , quais são os arcos, cujo seno vale $+\frac{1}{2}$?

16. Entre 0° e 360° , quais são os arcos, cujo seno vale $-\frac{1}{2}$?

17. Escrever a expressão geral dos arcos, cujo co-seno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. Resolver as equações: $\tan x = \sqrt{3}$; $\csc x = \sqrt{2}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos x = \frac{1}{2}$

19. Achar as expressões gerais dos arcos que satisfazem as equações:
 $\sin x = \sin 30^\circ$; $\cos x = -\cos 20^\circ$; $\tan x = \tan 45^\circ$;
 $\tan x = \cot 50^\circ$; $\cot(2x + 20^\circ) = \tan 48^\circ$.

20. Achar os arcos compreendidos entre 1.440° e 1.800° que satisfazem a equação: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

● Resolva as equações:

21. $\sin(3x + 108^\circ) = \sin(x - 24^\circ)$.

22. $\tan(3x - 45^\circ) = \tan(x + 30^\circ)$.

23. $\sec 3x = \sqrt{2}$, e ache todas as extremidades distintas de x .

24. Resolva $\cos \frac{x}{3} = \sin(40^\circ + 3x)$ e, em seguida, ache o menor arco positivo que a satisfaz.

25. $\tan(3x + 60^\circ) = \tan(360^\circ + x)$ e verifique o menor arco positivo que a satisfaz.

26. Da equação $\sin x = \sin a$, quais as relações que se concluem entre os arcos a e x ?

27. Passar para forma direta as funções: $y = \arcsin x$; $y = 2 \arccos x$;
 $y = \frac{1}{2} \arctan(x - 1)$; $y = 3 \operatorname{arccot}(2x)$.

28. Achar os valores das funções: $x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $x = \arctan 1$;
 $x = \operatorname{arcsec}(-2)$; $x = \operatorname{arccot} \sqrt{3}$; $x = \arccos 0$.

29. Achar os valores de x que satisfazem às equações:

a) $\operatorname{arcsec} \sqrt{3x-1} = \arctan x$

b) $\arcsin(x+2) = \operatorname{arccsc}(2x+3)$

30. Calcular: $\cos(\arctan \sqrt{3})$; $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$.

R E S P O S T A S:

1. $-\tan 30^\circ$, $-\sec 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $-\sec 45^\circ$, $\sin 52^\circ$, $-\tan 29^\circ 32'$, $\cot 59^\circ 33'$,
 $-\sin 70^\circ$, $\sin 30^\circ$.

2. $-\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, -1 , $-\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

3. $-2 \sin x$ 4. 0 5. $-\cot a$ 6. 2

7. $\cot x$ 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 9. $-\sqrt{3}$ 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. $-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 12. $-\frac{1}{3}$ 13. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 14. 2

15. 30° e 150° 16. 210° e 330° 17. $k. 360^\circ \pm 135^\circ$

18. $k. 180^\circ + 60^\circ$; $k. 360^\circ + 45^\circ$ e $k. 360^\circ + 135^\circ$; $k. 360^\circ + 60^\circ$ e
 $k. 360^\circ + 120^\circ$; $k. 360^\circ \pm 60^\circ$;

19. $k. 360^\circ + 30^\circ$ e $k. 360^\circ + 150^\circ$; $k. 360^\circ + 160^\circ$ e $k. 360^\circ + 200^\circ$;
 $k. 180^\circ + 45^\circ$; $k. 180^\circ + 40^\circ$; $k. 90^\circ + 11^\circ$

20. 1680° e 1740° . 21. $k. 180^\circ - 66^\circ$ e $k. 90^\circ + 24^\circ$

22. $k. 90^\circ + 37^\circ 30'$ 23. $k. 120^\circ \pm 15^\circ$; 15° , 105° , 135° , 225° , 255° , 345°

24. $k. 108^\circ + 15^\circ$ e $k. 135^\circ + 18^\circ 45'$, 15° . 25. $k. 90^\circ + 150^\circ$, 60°

26. $x = k. 360^\circ + a$ e $x = k. 360^\circ + (180^\circ - a)$ 27. $\sin y = x$, $\cos \frac{y}{2} = x$,
 $\tan 2y = x - 1$, $\cot \frac{y}{3} = 2x$

28. $k. 360^\circ + 240^\circ$ e $k. 360^\circ - 60^\circ$; $k. 180^\circ + 45^\circ$; $k. 360^\circ + 120^\circ$ e
 $k. 360^\circ + 240^\circ$; $k. 180^\circ + 30^\circ$; $k. 180^\circ + 90^\circ$

29. a) 1 e 2, b) -1 e $-2,5$ 30. $\pm \frac{1}{2}$ e $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO

31. Calcule o valor de $\operatorname{tg} 855^\circ$ (E.N.E. — 1958) *Resp.*: -1 .

32. Calcule os valores de m para os quais os ângulos da forma $m - \frac{3\pi}{2}$ têm tangente. (E.N.E. — 1958) *Resp.*: $m \neq (k+2)\pi$.

33. Calcule $\sin \left(\arccos \frac{1}{5} \right)$, sendo $\arccos \frac{1}{5}$ do 4.º quadrante (E.N.E.

- 1958) *Resp.*: $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

34. As condições para que dois arcos α e α' tenham o mesmo seno são... (E. Flu. E. - 1958).

35. Calcule a expressão $\sin x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ (E. P. U. C. - 1958)
Resp.: 0.

36. Verificar a identidade:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y} = \cot^2 x \cdot \cot^2 y - 1 \quad (\text{E.E.U. R. G. Sul} - 1958)$$

✓ 37. Calcule x sabendo que

$$\arcsin \left(-\frac{1}{x} \right) = \arccos \frac{1}{2x-3} \quad (\text{E.P.U.C.} - 1960)$$

Resp.: 1.

38. Determine todos os valores de x que verificam a igualdade:

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \quad (\text{F.N.Fil.} - 1959)$$

Resp.: $(2k+1)\pi/2$ e $(2k+1)\pi$

39. Verificar que qualquer que seja $x > 0$, tem-se:

$$\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} \quad (\text{E. Naval} - 1938 \text{ e F.N.F.} - 1955)$$

40. Calcule as linhas trigonométricas do arco de 3.360° . (E.F. Eng.ª - 1958)

Resp.: $\sin 3360^\circ = \sqrt{3}/2$, etc.

41. Calcule a expressão geral dos arcos x , tais que:

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad (\text{EPUC} - 1959)$$

Resp.: $k\pi/2$.

42. Dê o valor de $\sin x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$ (EPUC - Rio - 1958)
Resp.: 0.

UNIDADE VI

OPERAÇÕES COM ARCOS

1. Medida algébrica da projeção de um vetor.

A medida algébrica da projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo é igual ao produto da medida algébrica do vetor pelo co-seno do ângulo que seu suporte forma com o eixo.

Demonstração.

Demonstraremos o teorema apenas no caso do vetor e do eixo de projeção serem coplanares, por ser a única hipótese de interesse ao curso.

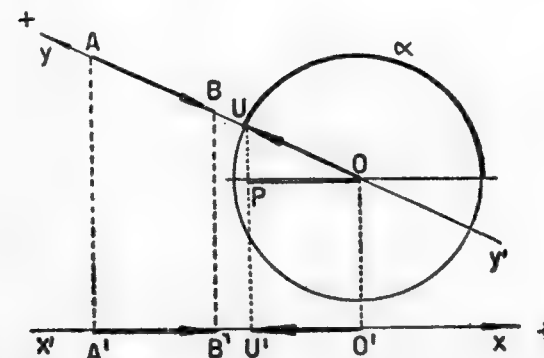


FIG. 26

Seja AB o vetor dado, $y'y$ o suporte desse vetor, OU o vetor unitário do suporte e, finalmente, $x'x$ o eixo de projeção (fig. 26).

O ângulo dos dois eixos é α (formado pelas direções positivas).

As projetantes AA' , BB' , UU' e OO' são paralelas (por serem perpendiculares ao eixo de projeção), logo, determinam sobre os eixos segmentos proporcionais. Temos, assim, em valor absoluto:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'U'}{OU}$$

Como é fácil observar na figura a igualdade é, também, verdadeira quanto ao sinal, pois os dois membros são negativos. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{O'U'}}{\overrightarrow{OU}} \quad (1)$$

Por outro lado temos: $\overrightarrow{OU} = +1$ (vetor unitário)

$$\overrightarrow{O'U'} = \overrightarrow{OP} = \cos \alpha$$

substituindo na igualdade (1):

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\cos \alpha}{+1}$$

donde, finalmente:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \cdot \cos \alpha$$

ADIÇÃO DE ARCOS

2. Adição de arcos. Adição de arcos é a operação que consiste em, dadas as funções circulares de dois ou mais arcos, calcular as funções circulares da soma desses arcos.

3. Fórmulas para adição de dois arcos. Sejam os arcos $AM = a$ e $MN = b$ (figura 27); logo: $AN = a + b$.

Para traçar as linhas do arco b , cuja origem é M , façamos com que os eixos $A'A$ e $B'B$ sofram uma rotação de amplitude α , como indica a figura, ficando OB_1 paralela a PN . Virá:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} \sin(a+b) = \overline{P_1N} \\ \cos(a+b) = \overline{OP_1} \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \sin b = \overline{PN} \\ \cos b = \overline{OP} \end{cases} \end{aligned}$$

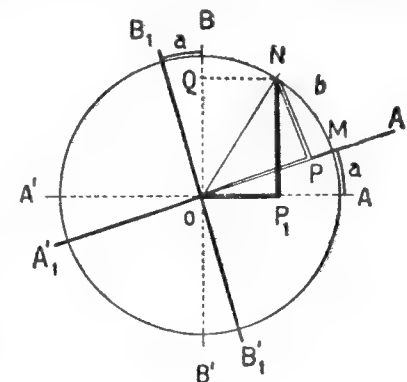


FIG. 27

1.º $\sin(a+b)$. Eixo $B'B$.

Consideremos, a equipolência:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON}$$

De acordo com o teorema de Carnot, teremos, qualquer que seja o eixo de projeção:

$$(\text{pr. } \overrightarrow{ON}) = (\text{pr. } \overrightarrow{OP}) + (\text{pr. } \overrightarrow{PN}). \quad (3)$$

Da igualdade (1) resulta:

$$(\text{pr. } \overrightarrow{ON}) = \overline{OQ} = \overline{P_1N} = \sin(a+b)$$

Do teorema da projeção e das igualdades (2) decorre:

$$(\text{pr. } \overrightarrow{OP}) = \overline{OP} \cdot \cos(\widehat{OP, OB}) = \overline{OP} \cdot \cos(90^\circ - a) = \cos b \cdot \sin a.$$

$$(\text{pr. } \overrightarrow{PN}) = \overline{PN} \cdot \cos(\widehat{OB, PN}) = \overline{PN} \cdot \cos(\widehat{OB, OB_1}) = \sin b \cdot \cos a.$$

Substituindo em (3), conclui-se a fórmula:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

2.º $\cos(a+b)$. Eixo $A'A$.

Projetando a equipolência (3) sobre o eixo $A'A$:

$$\text{pr. } (\overrightarrow{ON}) = \overline{OP_1} = \cos(a+b).$$

$$\text{pr. } (\overrightarrow{OP}) = \overline{OP} \cdot \cos(\widehat{OP, OA}) = \cos b \cdot \cos a.$$

$$\begin{aligned} \text{pr. } (\overrightarrow{PN}) &= \overline{PN} \cdot \cos(\widehat{PN, OA}) = \overline{PN} \cdot \cos(\widehat{OB_1, OA}) = \\ &= \overline{PN} \cdot \cos(90^\circ + a) = \sin b \cdot \sin(-a) = -\sin a \cdot \sin b. \end{aligned}$$

Substituindo os valores em (3), temos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

3.^o Fórmula de $\tan(a+b)$.

Sabe-se que:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

Logo, pelas duas fórmulas anteriores, conclui-se:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Dividindo os dois termos da última fração pelo produto $\cos a \cos b$, suposto diferente de zero:

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

OBSERVAÇÃO. O emprêgo desta fórmula fica subordinado à condição $\cos a \cos b \neq 0$, isto é, a e b diferentes de $k \cdot 180^\circ + 90^\circ$.

SUBTRAÇÃO DE ARCOS

4. Subtração de arcos. A operação consiste em, dadas as linhas dos arcos a e b , calcular as linhas do arco $a-b$.

5. Fórmulas de subtração. A diferença $a-b$ pode ser escrita:

$$a-b = a + (-b)$$

Assim, aplicando as fórmulas de adição:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}$$

Tendo presente, pelas relações dos arcos negativos, que:

$$\cos(-b) = \cos b, \quad \sin(-b) = -\sin b \text{ e } \tan(-b) = -\tan b$$

conclui-se:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

6. Resumo. Observando que as fórmulas de subtração são exatamente as mesmas que as de adição, exceto quanto aos sinais, podemos reuní-las no seguinte quadro:

Q U A D R O I I I

Adição e subtração

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

Exemplos.

1.^o Desenvolver e simplificar: $\cos(a+b) + \cos(a-b)$.

Aplicamos as fórmulas do quadro III.

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b.$$

2.^o Sendo a e b arcos do primeiro quadrante e tendo-se $\sin a = \frac{3}{5}$ e $\sin b = \frac{5}{13}$, calcular $\sin(a+b)$ e $\cos(a-b)$.

Resolução.

Calculemos previamente os co-senos dos arcos dados:

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Substituindo os valores nas fórmulas de adição:

$$\sin(a+b) = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$

$$\cos(a-b) = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

✓ 3.º) *Demonstrar a identidade*, considerando os arcos do 1.º quadrante:

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Resolução.

Façamos:

$$\begin{cases} \arctan \frac{1}{2} = a \\ \arctan \frac{1}{3} = b \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \tan a = \frac{1}{2} \\ \tan b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim resulta:

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

Logo:

$$a+b = \frac{\pi}{4}$$

ou

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

MULTIPLICAÇÃO

7. Definição. Multiplicação é a operação que consiste em, dadas as linhas do arco a , calcular as do arco $n \cdot a$, sendo n inteiro e positivo.

8. Fórmulas de duplicação. No caso do multiplicador n ser igual a 2, obtêm-se as fórmulas do arco duplo. Para

isso, é suficiente fazer $b = a$ nas fórmulas de adição, o que dará:

$$\sin(a+a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a = 2 \sin a \cdot \cos a.$$

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \cdot \tan a} = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

9. Fórmulas gerais. Façamos, nas fórmulas de adição, $b = (n-1)a$. Obteremos:

$$a + (n-1)a = na$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \sin(na) &= \sin a \cdot \cos(n-1)a + \sin(n-1)a \cdot \cos a. \\ \cos(na) &= \cos a \cdot \cos(n-1)a - \sin a \cdot \sin(n-1)a. \\ \tan(na) &= \frac{\tan a + \tan(n-1)a}{1 - \tan a \cdot \tan(n-1)a} \end{aligned}$$

10. Conseqüências das fórmulas de duplicação. Consideremos a fórmula de duplicação:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (I)$$

Substituindo $\cos^2 a$ em função de $\sin a$ ou de $\cos a$:

$$\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

Que também se podem escrever:

$$\begin{aligned} 2\sin^2 a &= 1 - \cos 2a & \text{ou} & & 1 - \cos 2a &= 2\sin^2 a \\ 2\cos^2 a &= 1 + \cos 2a & & & 1 + \cos 2a &= 2\cos^2 a \end{aligned}$$

11. Resumo. As fórmulas de duplicação e suas conseqüências podem ser resumidas no seguinte quadro:

QUADRO IV

Multiplicação

FÓRMULAS PRINCIPAIS	CONSEQUÊNCIAS
$\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ $1 - \cos 2a = 2 \text{sen}^2 a$

OBSERVAÇÃO. Nas fórmulas do Quadro IV, o arco do primeiro membro é o dobro do arco do segundo. Assim, as fórmulas de duplicação podem ser escritas com vários aspectos, bastando que o arco do primeiro membro seja o dobro do arco do segundo. Assim:

$$\text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{sen } 4a = 2 \text{ sen } 2a \cos 2a \quad \text{sen } 3x = 2 \text{ sen } \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

Exemplos.

1.º Sendo $\text{sen } a = \frac{3}{5}$, calcular as linhas do arco duplo.

Resolução.

Temos:

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \tan a = \frac{\frac{3}{5}}{\pm \frac{4}{5}} = \pm \frac{3}{4}$$

Substituindo nas fórmulas de duplicação:

$$\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a = 2 \times \frac{3}{5} \times \left(\pm \frac{4}{5} \right) = \pm \frac{24}{25}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \times \left(\pm \frac{3}{4} \right)}{1 - \frac{9}{16}} = \pm \frac{24}{7}$$

2.º Calcular $\text{sen } 2a$, conhecendo a diferença $\text{sen } a - \cos a = 0,5$

Resolução.

A fórmula de $\text{sen } 2a$ é o duplo produto $2 \text{ sen } a \cos a$ que aparecerá, se elevarmos ao quadrado a diferença dada. Assim, temos:

$$(\text{sen } a - \cos a)^2 = \text{sen}^2 a + \cos^2 a - 2 \text{ sen } a \cos a = 0,25$$

ou $1 - \text{sen } 2a = 0,25$

e, finalmente: $\text{sen } 2a = 0,75$

3.º Achar a fórmula de $\text{sen } 3a$, em função de $\text{sen } a$.

Resolução.

Fazendo $n=3$ nas fórmulas gerais de multiplicação, obtemos:

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a \cos 2a + \text{sen } 2a \cos a$$

ou $\text{sen } 3a = \text{sen } a (\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + 2 \text{ sen } a \cos a \cos a$

$$= \text{sen } a \cos^2 a - \text{sen}^3 a + 2 \text{ sen } a \cos^2 a$$

$$= 3 \text{ sen } a \cos^2 a - \text{sen}^3 a$$

Substituindo $\cos^2 a$:

$$\text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a (1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^3 a$$

$$= 3 \text{ sen } a - 3 \text{ sen}^3 a - \text{sen}^3 a$$

e, finalmente

$$\text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a - 4 \text{ sen}^3 a$$

12. Aplicação. As fórmulas de multiplicação permitem estabelecer o teorema seguinte, de grande aplicação na resolução de equações:

As linhas de um arco podem ser expressas como funções racionais da tangente de sua metade.

Demonstração.

As fórmulas de multiplicação podem ser escritas:

$$\text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

A terceira demonstra o teorema em relação à tangente. As duas primeiras podem ser escritas:

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}$$

Dividindo os dois termos de cada fração por $\cos^2 \frac{a}{2}$, suposto diferente de zero, isto é, o arco a diferente de $(2k+1)\pi$ obteremos:

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} \text{ e } \cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

Resumo:

Q U A D R O V

Expressões racionais em função de $\tan \frac{a}{2}$ $\left[\frac{a}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \right]$

$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$	$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$	$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$
--	--	--

DIVISÃO DE ARCOS

13. Definição. Em geral, as fórmulas de divisão de arcos têm por fim calcular as linhas do arco $\frac{a}{n}$ (n inteiro), sendo dadas as linhas do arco a .

No caso particular em que $n = 2$, obtêm-se as fórmulas de bissecção do arco, e será o único que estudaremos.

14. Fórmulas de bissecção em função do co-seno. Consideremos as duas consequências do quadro IV:

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

Resolvendo em relação a $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$, virá sucessivamente:

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2} \text{ e } \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

Extraindo-se as raízes quadradas, obtêm-se as duas fórmulas:

$$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \text{ e } \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

Dividindo membro a membro, obteremos a fórmula de $\tan \frac{a}{2}$ e podemos formar o quadro completo das fórmulas de bissecção:

Q U A D R O V I

Divisão

$\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$	$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$	$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$
--	--	---

Aplicação numérica.

Se além de ser dado $\cos a$, fôr também dado o valor numérico do arco a , o quadrante do arco $\frac{a}{2}$ fica determinado e, conseqüentemente, ficará determinada a solução conveniente.

Exemplo.

Dado $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular as linhas de 105° .

Resolução.

O arco de 105° é do segundo quadrante. O seno é positivo, o co-seno e a tangente são negativos. Assim, escolhendo os sinais convenientes nas fórmulas do Quadro VI, virá:

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 105^\circ = -\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 105^\circ = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = -(2 + \sqrt{3}).$$

15. Observação.

Fórmulas de bissecção em função do seno e da tangente podem ser obtidas; são, porém, de nenhuma aplicação para o nosso programa.

EXERCÍCIOS

1. Partindo das linhas conhecidas de 30° e 45° , calcular, por adição e subtração, as linhas de 75° e 15° .

$$\text{Resp.: } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}.$$

2. Dados $\operatorname{sen} a = 3/5$ e $\operatorname{sen} b = 4/5$ e sendo a e b do 1.º quadrante, calcular: $\operatorname{sen} (a - b)$ e $\cos (a + b)$ Resp.: $-7/25$ e 0 .

3. Dados $\cos a = 4/5$ e $\cos b = 12/13$, e sendo a e b do 1.º quadrante, calcular: $\operatorname{sen} (a + b)$, $\cos (a + b)$, $\operatorname{sen} (a - b)$ e $\cos (a - b)$.

$$\text{Resp.: } \frac{56}{65}, \frac{33}{65}, \frac{16}{65}, \frac{63}{65}.$$

4. Sendo $\operatorname{sen} a = 1/4$ e $\cos b = 3/5$, calcular $\cos (a + b)$.

$$\text{Resp.: } \pm \frac{1}{5} \pm \frac{3\sqrt{15}}{20}$$

5. Sendo $\tan a = 2/3$ e $\tan b = -5/9$, calcular $\tan (a + b)$. Resp.: $3/37$.
 6. Calcular $\tan (a + b)$ sendo $\tan a = 1/4$ e $\tan b = 1/5$. Resp.: $9/19$.
 7. Calcular $\tan (x - y)$, dadas $\tan x = 3/4$ e $\tan y = 1/7$. Resp.: $17/31$.
 8. Sendo $\tan y = 2$ e $x + y = 135^\circ$, calcular $\tan x$. Resp.: 3 .
 9. Sendo $\tan 135^\circ = -1$ e $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$, calcular $\tan 105^\circ$ (Lisbôa Liceus). Resp.: $-2 - \sqrt{3}$.
 10. Num $\triangle ABC$ tem-se: $\cot B = 2$, $\cot C = 3$. Calcular $\tan A$ e $\hat{A}$. Resp.: -1 e 135° .

Simplificar:

11. $\operatorname{sen} (90^\circ + a)$, $\cos (90^\circ + a)$, $\tan (90^\circ + a)$. Resp.: $\cos a, -\operatorname{sen} a, -\cot a$.
 12. $\operatorname{sen} (60^\circ + x) - \operatorname{sen} (60^\circ - x)$. Resp.: $\operatorname{sen} x$.
 13. $\operatorname{sen} (x - 30^\circ) + \cos (x + 60^\circ)$. Resp.: 0 .
 14. $\cos x + \cos (120^\circ + x) + \cos (240^\circ + x)$. Resp.: 0 .
 15. Expressir $\frac{\cos (a - b)}{\cos a \cos b}$ em função das tangentes de a e b (Lisboa, Liceus). Resp.: $1 + \tan a \cdot \tan b$.
 16. Calcular $\operatorname{sen} (a - b)$, $\cos (a - b)$ e $\tan (a - b)$ sabendo que a e b são respectivamente do terceiro e primeiro quadrantes e que $\tan a = \frac{4}{3}$ e $\tan b = \frac{3}{4}$. Qual o quadrante de $a - b$?

$$\text{Resp.: } -\frac{7}{25}, -\frac{24}{25} \text{ e } \frac{7}{24}. \text{ Terceiro.}$$

17. Achar $\cos (a - b)$, dados $\tan a = \frac{4}{3}$ (a do 3.º quadrante) e $\csc b = -\frac{13}{12}$ (b do 4.º quadrante). Resp.: $\frac{33}{65}$.
 18. Achar $\sec (x - 45^\circ)$, sendo $\tan x = -\frac{4}{3}$ e x do 2.º quadrante. Resp.: $5\sqrt{2}$.

19. Dada a equação $\sin(45 + a) + \sin(45 - a) = 1$, calcular $\cos a$.

Resp.: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Verificar a identidade:

20. $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1$.

Considerando arcos compreendidos entre 0 e 90°, verificar:

21. $\text{Arc tan } \frac{1}{3} + \text{Arc tan } \frac{1}{2} = 45^\circ$.

22. $\text{Arc sen } 3/5 + \text{Arc tan } 4/3 = 90^\circ$.

23. $\text{Arc tan } 3/5 + \text{Arc tan } 1/4 = 45^\circ$.

24. Dado $\sin x = 1$, calcular $\cos 2x$. Resp.: -1.

25. Dado $\cos a = 0,8$, calcular $\cos 2a$. Resp.: 0,28.

26. Sendo $\cos x = -0,5$ e x do 2.º quadrante, calcular $\sin 2x$ e $\cos 2x$.

Qual o quadrante de $2x$? Resp.: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, -0,5. Terceiro.

27. Dada $\tan x = \sqrt{2} - 1$, calcular $\tan 2x$. Resp.: 1.

28. Sendo $\sin a = 1/2$, calcular $\sin 4a$ e $\cos 4a$. Resp.: $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

29. Os arcos a e b são do primeiro quadrante e tem-se: $\sin a = \frac{5}{13}$,
 $\sin b = \frac{3}{5}$. Calcular $\sin 2(a + b)$. Resp.: $\frac{3696}{4225}$

30. Dado $\cos a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, calcular $\cos 2a$ e, daí, concluir todos
os valores dos arcos $2a$ e a . Resp.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k \cdot 360^\circ \pm 30^\circ$ e
 $k \cdot 180^\circ \pm 15^\circ$.

31. Calcular $\sin 2x$, sendo x do 3.º quadrante e $\sin x = -3/4$.

Resp.: $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

32. Se tivermos $\sin 2x < 0$, em que quadrantes pode estar o arco x ?
Resp.: No 2.º ou 4.º.

33. Considerando a equação $\sin x + \cos x = 1$, 2, calcular $\sin 2x$.
Resp.: 0,44.

34. Os arcos a e b são do primeiro quadrante e tais que $\sin a = \frac{1}{3}$,
 $\sin b = \frac{1}{2}$. Calcular $\sin 2(a - b)$. Resp.: $\frac{4\sqrt{2} - 7\sqrt{3}}{18}$.

35. Dada $\cot \frac{a}{2} = \sqrt{3}$, calcular $\sin a$. Resp.: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

36. Dada $\tan \frac{a}{2} = 2 - \sqrt{3}$, calcular as linhas do arco a .

Resp.: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

37. Sendo $\tan x = 3$, calcular $\sin 4x$. Resp.: -0,96.

38. Demonstrar a fórmula de multiplicação $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}$

39. Calcular o valor da expressão $8 \cos 2x + \sin 2x$, sendo $\tan x = 2/3$.
Resp.: 4.

Verificar as identidades:

40. $\frac{\sin a}{1 + \cos a} = \tan \frac{a}{2}$

41. $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{1 - \tan^2 x}$

42. $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \times \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \tan \frac{a}{2}$ (A. Rebière)

43. $\csc 2a + \cot 2a = \cot a$

44. $\sin x \cdot \cos x (1 + \tan x) (1 + \cot x) = 1 + \sin 2x$.

45. $\tan(45 - a) + \tan(45 + a) = 2 \sec 2a$.

46. $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$.

47. $4 \sin x \cdot \cos(30 + x) \cdot \cos(30 - x) = \sin 3x$

48. $2 \cot 2a + \tan a = \cot a$.

49. $\text{Arc tan } \frac{1}{7} + 2 \text{ Arc tan } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

50. $2 \text{ Arc sen } \frac{1}{3} + \text{Arc sen } \frac{7}{9} = \frac{\pi}{2}$

51. $\text{Arc tan } \frac{1}{7} + 2 \text{ Arc sen } \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$

52. $4 \text{ Arc tan } \frac{1}{5} - \text{Arc tan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

53. Sendo $\cos a = \frac{3}{5}$, calcular as linhas de $\frac{a}{2}$.

Resp.: $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}; \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}; \pm \frac{1}{2}$

54. Dado $\cos 1.680^\circ = -1/2$, calcular as linhas de 840° .

Resp.: $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$

55. Sendo $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular as linhas de 15° .

Resp.: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, 2 - \sqrt{3}$

56. Dado $\cos a = 0,7$, calcular $\tan \frac{a}{2}$. Resp.: $\pm \sqrt{\frac{3}{17}}$

57. De $\cos 45^\circ$, achar as funções de $22^\circ 30'$.

Resp.: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

58. Dado $\cos x = -\frac{1}{2}$ e x do 2.º quadrante, calcular $\tan \frac{x}{2}$. Resp.: $\sqrt{3}$

59. Dado $\sin 30^\circ = 1/2$, calcular $\sin 15^\circ$. Resp.: $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

60. Dado $\sin 1.110^\circ = 0,5$, calcular $\sin 555^\circ$ e $\cos 555^\circ$. Resp.: $-0,26$ e $-0,97$

61. Dado $\sin a = 3/5$ e $90^\circ < a < 180^\circ$, calcular $\sin \frac{a}{2}$. Resp.: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

62. Sendo $\sin a = -\frac{24}{25}$ e $270^\circ < a < 360^\circ$, calcular $\sin \frac{a}{2}$ e $\cos \frac{a}{2}$.

Resp.: $0,6$ e $-0,8$

63. Sendo $\cos 4a = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, calcular $\cos 2a$. Resp.: $\pm \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$

64. Sendo $\tan a = 3/4$ e a do 3.º quadrante, calcular $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$ e $\tan \frac{a}{2}$. Resp.: $\pm 3 \frac{\sqrt{10}}{10}, \pm \frac{\sqrt{10}}{10}, -3$

65. Sendo $\cot a = -1$ e $270^\circ < a < 360^\circ$ calcular as linhas de $\frac{a}{2}$

Resp.: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, 1 - \sqrt{2}$

66. Calcular o valor da expressão: $\sin \frac{x}{2} + 3 \tan \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}$ dados

$\cos x = 0,8$ e $0^\circ < x < 90^\circ$ Resp.: $\frac{5 - \sqrt{10}}{5}$.

Demonstrar as identidades:

67. $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

68. $\tan \frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1 + \cos z}$

69. $\tan \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{\cos a}$

70. $\tan \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 - \sin a}}{1 + \sin a}$

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

71. Sendo $\operatorname{tg} a = 3$, $\sec b = 2$, a do 3.º quadrante e b do 4.º quadrante, pede-se $\cos(a - b)$. (E. Eng. — São Paulo, 1948) Resp.: $\frac{\sqrt{10}}{20} (3\sqrt{3} - 1)$

72. Dados $\sin(a + b) = \frac{1}{2}$ e $\cos(a - b) = \frac{1}{3}$, pede-se $2(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$.

(E.P.U.C. — Rio, 1949) Resp.: $\frac{36\sqrt{3} - 24}{23}$.

73. Sendo a e b do 1.º quadrante e $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos b = 0$, calcule $\sin(a - 2b)$. (E. Flu. E. — 1958) Resp.: $-0,5$

74. Dado $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, calcular $\operatorname{tg} 15^\circ$, deduzindo a fórmula de passagem. (E. Militar — 1935)

75. Se $x = \arcsen 3/5$ e $y = \arcsen 4/5$, provar que $x+y=90^\circ$ (E. Mil. 1945)
76. Calcular a soma: $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. (E. Aeronáutica — 1953)
 Resp.: $k\pi + \frac{\pi}{4}$.
77. A co-tangente de um ângulo sendo $1 + \sqrt{2}$, calcular a secante do dobro desse ângulo. (E. Téc. Ex. 1946) Resp.: $\sqrt{2}$.
78. Mostrar que, para todo $x > 0$, tem-se: $\operatorname{artg} x + \operatorname{artg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
 (E. E. Ind. — São Paulo, 1950)
 Verificar as identidades:
79. $\cot x + \operatorname{tg} x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$ (E. N. Agron. 1952)
80. Provar que $\frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} (45^\circ + a)}{\cos a} = 1 + \tan a$ (I.T.A. — 1957).
81. $\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{a}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{sen} a}{\cos a}$ (E. Militar — 1938)
82. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} (45^\circ - x) (1 + \operatorname{tg} x)}{\sec x}$ (E. N. E. — 1958)
83. $\frac{\cos x \cdot \cos y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)}{1 - \cos(x+y)} = \cotg \frac{x+y}{2}$ (E. Flu. E. — 1958)
84. $\frac{1 + \cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = \cot a$ (E. E. São Paulo — 1947)
85. $\cot \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$ (E. E. São Paulo — 1948).
86. $\frac{\sec x + 1}{\sec x - 1} = (\csc x + \cot x)^2$ (E.N.E. — 1960).
87. $\frac{1}{2} + \cos 2a = \frac{\operatorname{sen} 3a}{2 \operatorname{sen} a}$ (E. E. São Carlos — S. P. — 1958).

UNIDADE VII

CÁLCULO POR LOGARÍTMOS

I — TRANSFORMAÇÕES

1. Transformação de somas e diferenças em produtos. O cálculo do valor numérico de uma expressão trigonométrica faz-se, em geral, por logaritmos. Como este cálculo exige que a expressão seja monômia, é indispensável transformá-la quando não o for.

Dai a necessidade de transformar as somas e diferenças em produtos equivalentes, o que corresponde a torná-las calculáveis por logaritmos.

2. Fórmulas fundamentais de transformação.**1.º Soma ou diferença de dois senos: $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q$**

De acordo com as fórmulas do Grupo III, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} (a + b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \\ \operatorname{sen} (a - b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a\end{aligned}$$

Somando e subtraindo, membro a membro:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b) &= 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b \\ \operatorname{sen} (a + b) - \operatorname{sen} (a - b) &= 2 \operatorname{sen} b \cdot \cos a\end{aligned} \quad (1)$$

Façamos

$$(2) \quad \begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \quad \text{donde: } (3) \quad \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Substituindo os valores (2) e (3) em (1), obtemos as fórmulas de transformação do seno:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

2.º Soma ou diferença de dois co-senos: $\cos p \pm \cos q$.

Anàlogamente temos para os co-senos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Somando e subtraindo membro a membro.

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Levando em conta as igualdades (2) e (3), obtemos as fórmulas de transformação do co-seno:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

3. Resumo. As fórmulas fundamentais de transformação podem ser resumidas no seguinte quadro:

QUADRO VII

Transformações logarítmicas.

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$$

4. Aplicações.

PRIMEIRA. Soma ou diferença de senos e co-senos.

Aplicam-se, imediatamente, as fórmulas do Quadro VII.

Exemplos.

$$\begin{aligned} 1.º \operatorname{sen} 36^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ &= 2 \operatorname{sen} \frac{36^\circ + 40^\circ}{2} \cos \frac{36^\circ - 40^\circ}{2} \\ &= 2 \operatorname{sen} 38^\circ \cos (-2^\circ) = 2 \operatorname{sen} 38^\circ \cdot \cos 2^\circ \end{aligned}$$

$$2.º \cos 30^\circ - \cos 70^\circ = -2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} (-20^\circ) = 2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} 20^\circ$$

$$\begin{aligned} 3.º \operatorname{sen} 27^\circ + \cos 31^\circ & \text{ (Substitui-se } \cos 31^\circ \text{ pelo seno do complemento):} \\ \operatorname{sen} 27^\circ + \cos 31^\circ &= \operatorname{sen} 27^\circ + \operatorname{sen} 59^\circ = 2 \operatorname{sen} 43^\circ \cos 16^\circ \end{aligned}$$

SEGUNDA. Expressões da forma $1 \pm \operatorname{sen} a$ e $1 \pm \cos a$.

No caso do seno substitui-se a unidade por $\operatorname{sen} 90^\circ$ e no caso do co-seno aplicam-se as consequências do Quadro IV.

Exemplos.

$$1 - \operatorname{sen} 48^\circ = \operatorname{sen} 90^\circ - \operatorname{sen} 48^\circ = 2 \operatorname{sen} 21^\circ \cos 69^\circ$$

$$1 + \cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ \text{ (Quadro IV)}$$

$$1 - \cos 48^\circ = 2 \operatorname{sen}^2 24^\circ \text{ (Quadro IV)}$$

TERCEIRA. Expressões da forma $\tan a \pm \tan b$, $\cot a \pm \cot b$ e $\tan a \pm \cot a$.

Substituem-se as linhas em função de seno e co-seno (Quadro I) e efetuam-se as operações.

Exemplos.

$$1.º \tan a + \tan b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$2.º \cot 30^\circ - \tan 40^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} - \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 70^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ \cos 40^\circ}$$

QUARTA. Expressões com mais de dois termos.

Neste caso, efetua-se a soma dos termos de dois em dois, de acôrdo com as fórmulas do Quadro VII.

Exemplo.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 5a + \operatorname{sen} 3a &= 2 \operatorname{sen} 3a \cos 2a + \operatorname{sen} 3a \\ &= 2 \operatorname{sen} 3a \left(\cos 2a + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} 3a (\cos 2a + \cos 60^\circ) \\ &= 4 \operatorname{sen} 3a \cdot \cos (a + 30) \cos (a - 30).\end{aligned}$$

5. Expressões que exigem o emprêgo de arco auxiliar.

De um modo geral, dada a soma $S = a + b$ ou a diferença $D = a - b$, se não fôr possível empregar as fórmulas do Quadro VII, utiliza-se o processo chamado do *arco* ou *ângulo* auxiliar.

Seja $S = a + b$ e $D = a - b$

Coloquemos o termo de maior módulo em evidência, seja

$$a > b \quad (1)$$

$$\text{teremos} \quad S = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad \text{e} \quad D = a \left(1 - \frac{b}{a} \right)$$

De acôrdo com a (1): $\frac{b}{a} < 1$; logo, será o co-seno de um arco do primeiro quadrante. Façamos, então:

$$\frac{b}{a} = \cos \alpha \quad (2)$$

donde resulta:

$$S = a(1 + \cos \alpha) \quad D = a(1 - \cos \alpha)$$

Considerando as conseqüências do Quadro IV:

$$\boxed{S = 2a \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \boxed{D = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (3)$$

Exemplo.

Transformar em monômio $2 + \sqrt{3}$.

Coloquemos o termo 2 em evidência:

$$S = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Fazendo:} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \alpha \quad \therefore \alpha = 30^\circ$$

$$\text{vem:} \quad S = 2(1 + \cos 30^\circ) = 2 \times 2 \cos^2 15^\circ$$

donde a expressão monômia

$$S = 4 \cos^2 15^\circ$$

II — DISPOSIÇÕES E USO DAS TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

6. Tábuas trigonométricas. As tábuas ou tabelas trigonométricas são de dois tipos.

1.º *Tábua de valores naturais.* Dão os valores numéricos das linhas trigonométricas, como vimos na quarta série do curso ginásial (Quarta Série, do mesmo autor).

2.º *Tábua de logarítmos das linhas trigonométricas.*

Dão os logarítmos dos valores das linhas. A seguir daremos a disposição e uso dessas tábuas, anexas ao presente exemplar.

7. Disposição das tábuas de logarítmos. Estudaremos a disposição das tábuas de quatro decimais, que julgamos suficiente para o nosso Curso Secundário.

Em primeiro lugar observemos que as tábuas contêm apenas os arcos de 0° a 90° , pois os arcos maiores poderão ser reduzidos ao primeiro quadrante.

Considerando, ainda, que o seno, o co-seno, a tangente e a co-tangente de um arco são, respectivamente, o co-seno, o seno, a co-tangente e a tangente do complemento, podemos reduzir a tábua aos arcos de 0° a 45° , pois, a cada função de um desses arcos corresponde a função complementar de um arco de 45° a 90° .

Dêsse modo, as tábuas são organizadas colocando-se à esquerda de cada página os arcos de 0° a 45° com o título de cada uma de suas funções na parte superior e à direita os

arcos complementares de 90° a 45° com os títulos na parte inferior. Assim, na primeira página, na primeira coluna, leremos, de cima para baixo, os logaritmos dos senos dos arcos de 0° a 5° e, de baixo para cima, os logaritmos dos cossenos dos arcos de 85° a 90°.

Encontra-se, ainda, na coluna d. 1', em cada página, a diferença entre os logaritmos das funções circulares quando o arco aumenta de 1'. Esta diferença é comum para a tangente e co-tangente, daí o título d.c. 1'.

Finalmente, na parte inferior de cada página encontra-se a redução a fração do minuto dos arcos de 10, 20, 30, 40 e 50 segundos.

8. Uso das tábuas.

PRIMEIRO PROBLEMA. *Dado o arco, achar o logaritmo da função.*

1.º CASO: *O número de minutos do arco é múltiplo de 10 e não há segundos.*

Neste caso, a leitura é imediata. Para os arcos menores do que 45°, leremos o número de graus e minutos à esquerda da página e o nome da função no alto da página.

Se o arco fôr maior que 45°, leremos os graus e minutos à direita e o nome da função na parte inferior da página.

Exemplos.

1.º) Achar $\log \sin 28^\circ 40'$

Lemos o arco de 28° 40' à esquerda e a palavra seno no alto da página; no cruzamento encontramos:

$$\log \sin 28^\circ 40' = \bar{1},6810.$$

2.º) Achar $\log \tan 52^\circ 10'$.

Lemos 52° 10' à direita da página e tangente na parte inferior, segunda coluna da direita (pág. 16), e teremos:

$$\log \tan 52^\circ 10' = 0,1098$$

2.º CASO: *O número de minutos não é múltiplo de 10 e não há segundos.*

Neste caso, lemos na tábua o múltiplo de 10 imediatamente inferior aos minutos e *somamos* a diferença para os minutos restantes no caso do seno e da tangente e *subtraímos* a mesma diferença no caso do co-seno e co-tangente, pois, quando o arco aumenta, o co-seno e a co-tangente diminuem.

Podemos utilizar o dispositivo prático indicado nos exemplos seguintes.

1.º) Achar $\log \sin 38^\circ 27'$.

Lemos na página 35° a 40° (pág. 16), na parte esquerda 38° 20' e em seguida somamos à mantissa encontrada na coluna seno, o produto por 7 do número colocado na coluna d.1' (diferença para um minuto). Assim:

$$\text{para } 38^\circ 20' \text{ — } \bar{1},7926. \text{ d.1}' = 1,5$$

$$\begin{array}{r} \text{para } 7' \text{ — } + 11 \\ \log \sin 38^\circ 27' = \bar{1},7937 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 7 \\ 10,5 \cong 11. \end{array}$$

2.º) Achar $\log \cot 72^\circ 28'$.

$$\begin{array}{r} \text{para } 72^\circ 20' \text{ — } \bar{1},5031 \text{ d.c.1}' = -4,4 \\ \text{para } 8' \text{ — } - 35 \\ \log \cot 72^\circ 28' = 1,4996 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 8 \\ - 35,2 \cong - 35. \end{array}$$

3.º CASO: *O arco tem segundos.*

Exemplo.

Achar $\log \tan 46^\circ 37' 40''$.

Neste caso, podemos arredondar o arco nos minutos abandonando o número de segundos até 30, sem forçar os minutos, ou forçando os minutos, quando o número de segundos fôr maior que 30 e proceder como nos exemplos anteriores.

Podemos, também, tomar o arco 46° 37' 40'' e usar a fração do minuto correspondente a 40'' que se lê na parte

inferior da página: $40'' = 0,67'$. Neste caso, multiplicaremos a diferença tabular 2,5 por 7,67 ($7' + 0,67'$):

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 46^\circ 30' & - & 0,0228 \text{ d. c. } 1' = 2,5 \\ \text{para } 7' 40'' & + & 19 \\ \hline \log \tan 46^\circ 37' 40'' = 0,0247 & & \times 7,67 \\ & & 3835 \\ & & 1534 \\ \hline & & 19,175 \cong 19. \end{array}$$

SEGUNDO PROBLEMA. *Dado o logaritmo da função, achar o arco.*

1.º CASO: *O logaritmo dado está na tábua.*

Neste caso, o arco procurado tem um número de minutos múltiplo de 10 e encontra-se imediatamente na tábua. À esquerda, se o nome da função estiver acima e à direita, se estiver abaixo.

Primeiro exemplo:

Achar x , sendo $\log \sin x = 1,6968$.

O número 1,6968 encontra-se na página 25º a 30º (pág. 14), e na coluna onde o nome seno está ao alto. Logo, o arco é lido à esquerda e tem-se

$$x = 29^\circ 50'$$

Segundo exemplo:

Achar x , sendo $\log \tan x = 0,4797$.

O número 0,4797 encontra-se na página 15º-20º (pág. 12) na 4.ª coluna da direita e a palavra tangente na parte inferior. Logo, o arco deve ser lido à direita e tem-se:

$$x = 71^\circ 40'$$

2.º CASO: *O logaritmo dado não está na tábua.*

Neste caso, procuramos na tábua o logaritmo mais próximo e inferior ao dado e lemos o correspondente número de graus e de dezenas de minutos. Em seguida, dividimos a diferença entre o logaritmo dado e o encontrado na tábua pela diferença tabular, o que dará as unidades do número de minutos

e os segundos arredondados. Estes minutos e segundos devem ser somados ao arco encontrado, no caso do seno e tangente e, subtraídos, no caso do co-seno e da co-tangente.

Primeiro exemplo:

Achar x , sendo $\log \sin x = 1,7228$.

O logaritmo mais próximo da coluna seno é 1,7222 (pág. 15) que corresponde ao arco de $31^\circ 50'$. A diferença entre o logaritmo dado e o da tábua é 6 ($7228 - 7222 = 6$).

A diferença tabular correspondente para $1'$ é 2.

Efetuada a divisão encontramos: $6 : 2 = 3'$.

Dispositivo prático.

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 1,7222 & \text{---} & 31^\circ 50' \text{ d. } 1' = 2 \\ \text{diferença } 6 & \text{---} & + 3' \\ \hline x & = & 31^\circ 53' \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Segundo exemplo:

Achar x , sendo $\log \tan x = 0,4893$.

O número menor mais próximo encontra-se na 4.ª coluna (tangente na parte inferior) e é 0,4882.

Temos o dispositivo prático:

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 0,4882 & \text{---} & 72^\circ 0' \text{ d. c. } 1' = 4,3 \\ \text{diferença } 11 & \text{---} & + 2' 30'' \\ \hline x & = & 72^\circ 2' 30'' \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 110 & 4,3 \\ 240 & \\ 250 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4,3 & \\ 2,55 & \cong 2' 30'' \end{array}$$

O quociente 2,55 corresponde a $2'$ e $0,55'$ a $30''$, de acordo com a tabela das frações de minuto encontrada na parte inferior da página.

Terceiro exemplo:

Achar x , sendo $\log \cos x = 1,1428$.

Dispositivo prático.

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 1,1345 & \text{---} & 82^\circ 10' \text{ d. } 1' = 9,3 \\ \text{diferença } 83 & \text{---} & - 8' 50'' \\ \hline x & = & 82^\circ 1' 10'' \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 830 & 9,3 \\ 860 & \\ 23 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9,3 & \\ 8,9 & = 8' 50'' \end{array}$$

III — CÁLCULO DE EXPRESSÕES

Calcular $x = \sin 28^\circ 30' + \cos 36^\circ 40'$ a) *Transformação em produto:*

$$x = \sin 28^\circ 30' + \sin 53^\circ 20'$$

$$\text{donde } x = 2 \sin 40^\circ 55' \cos 12^\circ 25'$$

b) *Cálculo*

$$\log x = \log 2 + \log \sin 40^\circ 55' + \log \cos 12^\circ 25'$$

Temos então, o dispositivo prático:

Cálculo definitivo	Cálculos auxiliares
$\log 2 = 0,3010$	1) $40^\circ 50' - \bar{1},8155 \quad D=1,4$
$\log \sin 40^\circ 55' = 1,8162$	para $5' - + 7$
$\log \cos 12^\circ 25' = \bar{1},9897$	$\log \sin 40^\circ 55' = \bar{1},8162$
$\log x = 0,1069$	2) $12^\circ 20' - \bar{1},9899 \quad D=0,3$
	pa $5' - - 2$
$x = 1,279$	$\log \cos 12^\circ 25' = \bar{1},9897$

EXERCÍCIOS

Transformar em monômios:

- $\cos 57^\circ + \cos 31^\circ$
- $\sin 32^\circ + \sin 28^\circ$
- $\sin 50^\circ - \sin 10^\circ$
- $\sin 33^\circ 28' + \sin 50^\circ 13'$
- $\cos 27^\circ 32' - \sin 48^\circ 53'$
- $\tan 38^\circ + \tan 27^\circ$
- $\cot 48^\circ - \cot 63^\circ$
- $\tan 20^\circ + \cot 40^\circ$
- $\cot 27^\circ - \tan 18^\circ$
- $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b}$
- $\frac{\cos a - \cos b}{\sin a + \sin b}$
- $2 \sin x + \sin 2x$
- $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ$

Achar na tábuas os logaritmos de:

- $\sin 38^\circ 10'$
- $\cos 45^\circ 30'$
- $\tan 58^\circ 40'$
- $\cot 18^\circ 50'$

- $\sin 49^\circ 27'$
- $\cos 38^\circ 46'$
- $\tan 32^\circ 29'$
- $\cot 79^\circ 18'$
- $\sin 70^\circ 15' 20''$
- $\cos 39^\circ 26' 30''$
- $\tan 63^\circ 15' 20''$
- $\cot 28^\circ 3' 40''$

Achar os arcos x , sendo dados:

- $\log \sin x = \bar{1},6833$
- $\log \cos x = \bar{1},8756$
- $\log \tan x = 0,1548$
- $\log \sin x = \bar{1},8573$
- $\log \cos x = \bar{1},4960$
- $\log \tan x = \bar{1},4782$

Calcular por logaritmos:

- $\cos 48^\circ 20' + \cos 30^\circ 16'$
- $\sin 35^\circ + \sin 51^\circ$
- $\sin 41^\circ 18' - \cos 63^\circ 18'$
- $\sin 28^\circ 26' + \cos 28^\circ 36'$
- $1 + \tan 34^\circ 36'$
- $1 + \sin a + \cos a$ para $a = 25^\circ 10' 20''$
- $2 \tan 12^\circ 25' \cos 25^\circ 18'$
- $\tan 38^\circ + \sin 47^\circ$
- $1 + \cos 28^\circ 36'$
- $435 \times \cos 37^\circ 20'$
- $\sqrt{3} + \cos 48^\circ 36'$
- $\sin 48^\circ 36' + \cos 48^\circ 36'$
- $\sqrt{3} + \sin 18^\circ$
- $3 + \cos 28^\circ 30'$
- $1 + \cot 18^\circ 28'$
- Achar o arco x , menor que 90° , para o qual $\tan x = \sqrt{2}$.

Resolver as equações.

- $\sin x = \frac{3}{5}$
- $4 \cos x = 3$
- $5 \tan x = 11$

51. Transforme em produto e, em seguida, verifique os valores de x que anulam a expressão $\sin x + \sin 3x + \sin 9x - \sin 5x$ (A. REBIÈRE).

Demonstrar as identidades:

- $\frac{\cot a + \tan b}{\tan a + \cot b} = \cot a \cdot \tan b$
- $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$
- $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \cot(a - 45^\circ)$
- $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \tan 3a$

RESPOSTAS:

- $2 \cos 44^\circ \cos 13^\circ$
- $2 \sin 30^\circ \cos 2^\circ$
- $2 \sin 20^\circ \cos 30^\circ$
- $2 \sin 41^\circ 50' 30'' \cos 8^\circ 22' 30''$
- $2 \sin 34^\circ 19' 30'' \sin 6^\circ 47' 30''$
- $\frac{\sin 65^\circ}{\cos 38^\circ \cos 27^\circ}$
- $\frac{\sin 15^\circ}{\sin 48^\circ \sin 63^\circ}$
- $\csc 40^\circ$
- $\frac{\cos 45^\circ}{\sin 27^\circ \cos 18^\circ}$

10. $\tan \frac{a+b}{2} \cot \frac{a-b}{2}$ 11. $\tan \frac{b-a}{2}$ 12. $4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$
13. $4 \cos^2 40^\circ \cos 20^\circ$ 14. $\bar{1},7910$ 15. $\bar{1},8457$ 16. $0,2155$
17. $0,4671$ 18. $\bar{1},8807$ 19. $\bar{1},8919$ 20. $\bar{1},8039$ 21. $\bar{1},2764$ 22. $\bar{1},9737$
23. $\bar{1},8878$ 24. $0,2976$ 25. $0,2732$ 26. $28^\circ 50'$ 27. $41^\circ 20'$ 28. 55°
29. $46^\circ 3'$ 30. $71^\circ 44' 30''$ 31. $16^\circ 44' 20''$ 32. $1,528$ 33. $1,351$
34. $0,210$ 35. $1,354$ 36. $1,69$ 37. $2,33$ 38. $0,398$ 39. $1,513$
40. $1,877$ 41. $345,9$ 42. $2,393$ 43. $1,412$ 44. $2,041$ 45. $3,994$
46. $3,880$ 47. $54^\circ 44'$ 48. $k. 360^\circ + 36^\circ 51' 45''$ e $k. 360^\circ + 143^\circ 8' 15''$
49. $k. 360^\circ \pm 41^\circ 25' 30''$ 50. $k. 180^\circ + 65^\circ 33' 10'$
51. $4. \sin 2x \cos 4x \cos 3x$; $90^\circ k$; $45^\circ k + 22^\circ 30'$; $60^\circ k + 30^\circ$.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

56. Transformando $1 - \sin x$ em expressão calculável por logaritmos obteremos..... (E. Flu. E., 1957) *Resp.*: $2\sin^2 \left(45 - \frac{x}{2}\right)$
57. Simplifique $\frac{\sin 40^\circ + \sin 50^\circ + \sin 72^\circ + \sin 82^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 50^\circ + \cos 72^\circ - \cos 82^\circ}$ (E. Flu. E. — 1957)
Resp.: $\cot 5^\circ$
58. Transforme em expressão logarítmica $\tan x \pm \cot x$ (E. N. E. — 1958).
59. Adaptar ao cálculo logarítmico: $y = \cos A + \cos B + \cos C - 1$, sendo A, B, C, ângulos de um triângulo (E. N. E. — 1948)
Resp.: $y = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
60. Tornar calculável por logaritmos $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x - \cot y}$ (E. E. São Paulo — 1948).
Resp.: $\frac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)} \tan x \tan y$.
61. Tornando a expressão $\sin x + \cos x$ calculável por logaritmo obtém-se..... (E.P.U.C. — Rio — 1957) *Resp.*: $\sqrt{2} \cos(x - 45^\circ)$.
62. Dados $\alpha = 23^\circ 51' 19''$ e $\beta = 21^\circ 16' 46''$, calcular um terceiro ângulo x , tal que: $\sin x = \sin \alpha + \sin \beta$. (E. Militar — 1933)
Resp.: $x = 50^\circ 15' 30''$

UNIDADE VIII EQUAÇÕES TRIGONÔMETRICAS

1. Definição. Uma equação diz-se trigonométrica quando contém um ou mais arcos incógnitos que nela figuram por intermédio das funções circulares.

Exemplo.

$$3 \sin x + 2 \cos x = 4.$$

Em geral, a equação admite uma infinidade de soluções que formam grupos, em número limitado, de arcos côngruos. Assim, a equação bem simples

$$\sin x = 0,5, \text{ ou } x = \arcsin \frac{1}{2}$$

por exemplo, admite, como vimos, uma infinidade de soluções que podem ser reunidas em dois grupos de arcos côngruos, cujas extremidades ficam situadas, respectivamente, no primeiro e no segundo quadrante e que têm para expressões gerais:

$$x = k. 360^\circ + 30^\circ \text{ e } x = k. 360^\circ + 150^\circ.$$

2. Resolução das equações de uma incógnita. Na resolução vamos considerar dois casos, conforme figurem na equação uma ou várias funções do arco incógnito.

3. PRIMEIRO CASO: Equações com uma única função. Neste caso, resolve-se algebricamente a equação em relação à função. Obtido o valor desta, determina-se o arco incógnito, como vimos na Unidade V.

Exemplo.

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, em $\sin x$, obtemos:

$$\sin x = 1 \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{3}{2}.$$

Convindo apenas a raiz 1, temos:

$$x = \arcsin 1 \quad \text{ou} \quad x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ$$

4. SEGUNDO CASO: A equação contém várias funções circulares do arco incógnito. O método geral consiste em reduzir ao caso anterior, tomando uma certa função circular por incógnita auxiliar e substituindo, em função dela, as várias outras.

A dificuldade única que se apresenta é a *escolha da incógnita auxiliar* a adotar, com o *fim principal* de evitar equações algébricas irracionais, cujas raízes, na maioria dos casos, exigem verificações trabalhosas.

É útil assinalar que todas as funções podem ser substituídas em função racional do seno e do co-seno; todavia, nos casos simples, pode ser tomada imediatamente uma outra função como incógnita auxiliar.

Primeiro exemplo: Resolver a equação $\tan x + 4 \cot x = 5$.

Temos (Quadro I): $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Substituindo na equação, a incógnita auxiliar será $\tan x$:

$$\tan x + \frac{4}{\tan x} = 5$$

Donde a equação do segundo grau em $\tan x$ ($\tan x \neq 0$):

$$\tan^2 x - 5 \tan x + 4 = 0,$$

cujas raízes são: $\tan x' = 1$ e $\tan x'' = 4$

De $\tan x' = 1$, conclui-se: $x' = k \cdot 180^\circ + 45^\circ$

De $\tan x'' = 4$, conclui-se: $x'' = k \cdot 180^\circ + 75^\circ 57' 50''$

Segundo exemplo: Resolver $\tan^2 x + \sec x = 0$

Temos (Quadro I): $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \therefore \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Substituindo na equação:

$$\sec^2 x + \sec x - 1 = 0$$

Donde:

$$\sec x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm 2,236}{2}$$

As raízes são: 0,618 e -1,618.

A primeira raiz não convém, pois a secante tem valor absoluto maior que um.

Temos a raiz única: $\sec x = -1,618$

A menor determinação de x é do 2.º quadrante, a tábua dá o associado x_1 , do 1.º quadrante, que é o suplemento, e temos:

$$\log \sec x_1 = \log 1,618 = 0,2089 \quad \text{e} \quad \log \cos x_1 = \bar{1},7910.$$

$$\therefore x_1 = 51^\circ 50'$$

A menor determinação de x será: $x = 180^\circ - 51^\circ 50' = 128^\circ 10'$.

A solução geral será: $x = k \cdot 360^\circ \pm 128^\circ 10'$

Terceiro exemplo: Equação do primeiro grau em seno e co-seno.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1. \quad (\text{E. M. — 1938})$$

Resolução.

Evitam-se radicais, transformando o primeiro membro em produto, por intermédio do ângulo auxiliar.

As transformações são as seguintes:

a) Divide-se a equação pelo coeficiente $\sqrt{3}$:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Faz-se:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \alpha} \quad (1)$$

e obtém-se

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou,

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou,

$$\operatorname{sen} x \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha$$

ou, ainda,

$$\operatorname{sen} (x + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \alpha \quad (2)$$

Da igualdade (1) conclui-se o valor: $\alpha = 30^\circ$
e, substituindo em (2):

$$\operatorname{sen} (x + 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ$$

Como

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ vem:}$$

$$\operatorname{sen} (x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \text{ ou } x + 30^\circ = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2}$$

Temos, então, as soluções:

$$x + 30^\circ = k \cdot 360^\circ + 30^\circ \text{ e } x + 30^\circ = k \cdot 360^\circ + 150^\circ,$$

onde, finalmente:

$$x = k \cdot 360^\circ \text{ e } x = k \cdot 360^\circ + 120^\circ.$$

Quarto exemplo: Equações com arcos múltiplos.

O melhor processo consiste em aplicar as fórmulas do Quadro VII, de transformação em produto. Sendo impossível, aplicam-se as fórmulas de multiplicação.

Seja resolver a equação:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0. \quad (\text{LABOUREUR})$$

Transformando em produto as somas $1 + \cos 2x$ e $\cos x + \cos 3x$, temos:

$$2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cdot \cos x = 0,$$

ou, decompondo em fatores:

$$2 \cos x (\cos x + \cos 2x) = 0.$$

Transformando o parênteses em produto:

$$4 \cdot \cos x \cdot \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

donde as soluções:

$$\cos x = 0, \cos \frac{3x}{2} = 0, \cos \frac{x}{2} = 0$$

e os arcos correspondentes:

$$x = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, x = k \cdot 120^\circ + 60^\circ \text{ e } x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ$$

Quinto exemplo: Método da tangente da metade.

Consiste em adotar como incógnita auxiliar $\tan \frac{x}{2}$, aplicando o teorema:

“Tôdas as linhas de um arco podem ser expressas em funções racionais da tangente de sua metade”
(Unidade VI n.º 12).

Seja resolver $\tan x + 2 \operatorname{sen} x = 0$.

Aplicando o teorema citado, façamos: $\tan \frac{x}{2} = y$.

Teremos, substituindo na equação, de acôrdo com as fórmulas do Quadro V:

$$\frac{2y}{1-y^2} + \frac{4y}{1+y^2} = 0 \quad 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$$

ou

$$2y^3 - 6y = 0$$

fatorando

$$2y(y^2 - 3) = 0$$

cujas raízes são: $y = 0$ e $y = \pm \sqrt{3}$.

De $y = 0$, ou $\tan \frac{x}{2} = 0$, conclui-se:

$$\frac{x}{2} = k \cdot 180^\circ \quad \therefore \quad x = k \cdot 360^\circ \quad (1)$$

De $y = \pm \sqrt{3}$ ou $\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{3}$, conclui-se:

$$\frac{x}{2} = k \cdot 180^\circ \pm 60^\circ \quad \therefore \quad x = k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$$

OBSERVAÇÃO: Poderíamos resolver a equação, substituindo $\tan x$ o que daria:

$$2 \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \text{ e } 2 \sin x \cdot \cos x + \sin x = 0 \quad (\cos x \neq 0).$$

Donde: $\sin x (2 \cos x + 1) = 0$

Obteríamos, então:

$$1.^\circ \quad \sin x = 0 \quad \therefore \quad x = k \cdot 180^\circ \quad (1)$$

$$2.^\circ \quad 2 \cos x + 1 = 0 \quad \therefore \quad \cos x = -\frac{1}{2} \text{ e } x = k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$$

Comparando as soluções (1), obtidas pelos dois métodos, observa-se que o primeiro exclui a solução dos arcos côngruos de 180° , dando apenas os de 360° . Isto ocorre porque quando a solução é da forma $k \cdot 360^\circ + 180^\circ$, a tangente da metade não é definida.

Ao aplicar o método da tangente da metade é, pois, indispensável, verificar se o arco $k \cdot 360^\circ + 180^\circ$ é raiz. Assim, as soluções são:

$$x = k \cdot 180^\circ \text{ e } x = k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ.$$

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

- $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ Resp.: $k \cdot 360^\circ, k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$
- $3(1 - \cos x) = \sin^2 x$ Resp.: $k \cdot 360^\circ$
- $\sec^2 x + \tan x = 1$ Resp.: $k \cdot 180^\circ + 135^\circ; k \cdot 180^\circ$
- $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$ Resp.: $k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \cdot 360^\circ + 150^\circ$
- $\csc x - \sec x = 0$ Resp.: $k \cdot 180^\circ + 45^\circ$
- $\sec x - \cos x = \sin x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ, k \cdot 180^\circ + 45^\circ$
- $3 \tan^2 x + 5 = 7 \sec x$ Resp.: $k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$
- $2 \cos^2 x + 7 \sin x = 5$ Resp.: $k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \cdot 360^\circ + 150^\circ$

- $\tan x + \cot x = 2$ Resp.: $k \cdot 180^\circ + 45^\circ$
- $3 \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 1 = 0$ Resp.: $k \cdot 180^\circ \pm 45^\circ; k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ$
- $\sin x \cdot \cos x = \tan x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ$
- $2 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1 = 0$ Resp.: $k \cdot 180^\circ + 90^\circ; k \cdot 180^\circ \pm 45^\circ$
- $\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{3}$ Resp.: $k \cdot 360^\circ + 30^\circ; k \cdot 360^\circ + 90^\circ$
- $\sin x + 3 \cos x = 3$ Resp.: $k \cdot 360^\circ; k \cdot 360^\circ + 36^\circ 52'$
- $\cos 3x + \cos x = \cos 2x$ Resp.: $k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ; k \cdot 90^\circ + 45^\circ$
- $\sin 2x + \sin x = \cos 2x + \cos x$ Resp.: $k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \cdot 120^\circ + 30^\circ$
- $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$ Resp.: $k \cdot 60^\circ, k \cdot 90^\circ \pm 15^\circ$
- $2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ$
- $\tan 2x = 3 \tan x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ; k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ$
- $\tan x = 2 \sin x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ; k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$
- $\cos 2x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1$ Resp.: $k \cdot 360^\circ; k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$
- $\sin x - \cos 2x = \sin 3x$ Res.: $k \cdot 90^\circ + 45^\circ; k \cdot 360^\circ + 330^\circ, k \cdot 360^\circ + 210^\circ$
- $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$ Resp.: $k \cdot 720^\circ \pm 120^\circ$
- $\cos x + \cos 2x = 2$ Resp.: $k \cdot 360^\circ$
- $\sin 3x = \sin x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ, k \cdot 90^\circ + 45^\circ$
- $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ, k \cdot 60^\circ, k \cdot 90^\circ$
- $\sin 5x = \sin 7x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ; k \cdot 30^\circ + 15^\circ$
- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ Resp.: $k \cdot 90^\circ; k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$
- $\sin 2x = \cos 3x$ Resp.: $k \cdot 360^\circ - 90^\circ; k \cdot 72^\circ + 18^\circ$
- $\tan(x + 45^\circ) = 1 + \sin 2x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ - 45^\circ$
- $\sin x + \csc x = 2$ Resp.: $k \cdot 360^\circ + 90^\circ$
- $\tan x + \cot x = 2$ Resp.: $k \cdot 180^\circ + 45^\circ$
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ Resp.: $k \cdot 360^\circ - 15^\circ; k \cdot 360^\circ + 75^\circ$
- $\tan x = 4 \cdot \sin^2 x$ Resp.: $k \cdot 180^\circ; k \cdot 180^\circ + 15^\circ; k \cdot 180^\circ + 75^\circ$
- $\tan x = -\cot x$ Resp.: Impossível.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Resolver as equações:

- $\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$ (E.P.U.C. — Rio, 1957).
Resp.: $k\pi + \frac{\pi}{4}$
- $\sin x = \sec x - \cos x$ (E. Flu. E. 1957) Resp.: $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$

38. $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$ (E. Militar — 1937) *Resp.*: $2k\pi$ e $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$
39. $\cos x = 2\sin \frac{x}{2}$ (E. Militar — 1937) *Resp.*: $360^\circ k \pm 42^\circ 56' 30''$
40. $3\sin x + 4\cos x = 5$, tomando para incógnita auxiliar $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$
(E. Militar — 1940) *Resp.*: $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}$
41. $3\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x = 3$ (E. Aeronáutica, 1952) *Resp.*: $18^\circ 26'$
42. $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}(x+a) \cdot \operatorname{tg}(x-a)$ (E. N. E. — 1958) *Resp.*: $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
43. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$ (E. Flu. E. — 1958)
Resp.: $\frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{42}$ e $\frac{2k\pi}{7} + \frac{5\pi}{42}$
44. $\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos x - \sin x)$ (E. Téc. Ex — 1946)
Resp.: $k\pi + \frac{\pi}{4}$; $2k\pi - \frac{\pi}{6}$; $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$.
45. $\cos 4x + 1 = \cos 2x$ (E. Técnica Ex. — 1948) *Resp.*: $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$.
46. $\cos 3x - \cos x = \frac{3}{2}$ (E. E. Ind. São Paulo — 1949) (*)
Resp.: $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, arcos $\frac{1 - \sqrt{13}}{4}$.
47. Dê a expressão geral de uma das soluções da equação:
 $4\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 0$ (E.P.U.C. — Rio, 1958)
Resp.: $k\pi + 33^\circ 4'$.
48. Sendo os arcos do 1.º quadrante, calcule a solução de:
 $\operatorname{arc} \sin x + 2\operatorname{arc} \cos x = \frac{3\pi}{4}$ (E. Flu. E. — 1958) *Resp.*: $\frac{\sqrt{2}}{2}$
49. Discutir a equação $\sin 2x = m \cdot \operatorname{tg} x$ e resolvê-la para $m = 1$
(E. Téc. Ex., 1945) — *Resp.*: $0 < m \leq 2$, $x = k\pi$ e $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.
50. Eliminar x e y no sistema: $x + y = a$
 $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b$
 $\cot x + \cot y = c$ (E.N.E. — 1951) *Resp.*: $\operatorname{tga} = \frac{bc}{c-1}$
51. Calcular o co-seno da soma dos ângulos que satisfazem às equações:
 $\operatorname{tga} + \cot b = 1$ e $\cot a + \operatorname{tg} b = 4$. (E. Téc. Ex. 1949) *Resp.*: 0.
52. Resolver: $1 - \sin x (3 + \sin 2x) + 3 \sin 2x = \cos^2 x$ (E. Arq. U. S. Paulo — 1953) *Resp.*: $x = k\pi$.
53. Resolver o sistema: $\cot x - \cot y = 2$
 $2 \sin x \sin y = 1$ (U.R.G. Sul — 1958)

(*) Ao prof. Cid GUELLI (Botucatu — S Paulo) agradecemos a colaboração das questões do Estado de São Paulo.

UNIDADE IX

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo. Entre os seis elementos principais isto é, os três lados e os três ângulos de um triângulo retângulo, conhecemos as duas relações:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(Teorema de Pitágoras)

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

(Lei de Tales, simplificada para $\hat{A} = 90^\circ$)

Além dessas, a trigonometria estabelece outras que apresentam a vantagem de relacionar os ângulos com os lados. As relações trigonométricas podem ser resumidas em dois enunciados.

1.º)

Qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo co-seno do ângulo agudo adjacente ao cateto considerado.

Demonstração.

Seja o triângulo ABC (fig. 28). Cada cateto é a projeção ortogonal da hipotenusa sobre o suporte do mesmo cateto. Assim, temos, de acordo com o teorema da medida da projeção:

$$\begin{aligned} b &= a \cos \hat{C} \\ c &= a \cos \hat{B} \end{aligned}$$

(1)

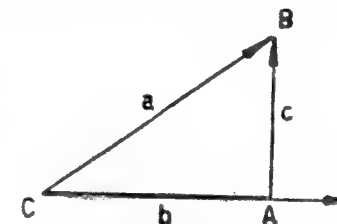


FIG. 28

Os ângulos agudos são complementares, logo, as relações (1) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} b &= a \cos (90^\circ - \hat{B}) & \text{ou} & & b &= a \sin \hat{B} \\ c &= a \cos (90^\circ - \hat{C}) & & & c &= a \sin \hat{C} \end{aligned} \quad (2)$$

As relações (1) e (2) demonstram o enunciado.

2.º)

Qualquer cateto é igual ao produto do outro pela tangente do ângulo oposto ao primeiro ou pela co-tangente do ângulo adjacente ao primeiro.

Demonstração.

Em virtude das relações (1) e (2), temos:

$$\begin{aligned} b &= a \sin \hat{B} & c &= a \sin \hat{C} \\ c &= a \cos \hat{B} & b &= a \cos \hat{C} \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro, resulta:

$$\frac{b}{c} = \tan \hat{B} \quad \text{e} \quad \frac{c}{b} = \tan \hat{C}$$

Donde, finalmente:

$$\begin{aligned} b &= c \tan \hat{B} \\ c &= b \tan \hat{C} \end{aligned} \quad (3)$$

Por serem complementares os ângulos agudos, as relações (3) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} b &= c \cdot \tan (90^\circ - \hat{C}) & \text{ou} & & b &= c \cdot \cot \hat{C} \\ c &= b \cdot \tan (90^\circ - \hat{B}) & & & c &= b \cdot \cot \hat{B} \end{aligned} \quad (4)$$

Resumo.

Q U A D R O VIII

$b = a \sin \hat{B}$	$b = a \cos \hat{C}$	$b = c \tan \hat{B}$	$b = c \cot \hat{C}$
$c = a \sin \hat{C}$	$c = a \cos \hat{B}$	$c = b \tan \hat{C}$	$c = b \cot \hat{B}$

2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos. Um triângulo fica determinado por três de seus elementos, sendo pelo menos um linear. Denominam-se **casos clássicos** aqueles em que os três elementos dados são *lados e ângulos*.

Quando o triângulo é retângulo, um dos elementos implicitamente conhecido é o ângulo reto; por isso, são dados apenas *dois* outros.

Os *casos clássicos* são *quatro*. Geralmente calcula-se também a área.

1.º CASO: São dados a hipotenusa e um ângulo agudo: a, B .

As relações do Quadro VIII e a lei de Tales dão, imediatamente, as fórmulas, como vemos na segunda coluna do exemplo seguinte.

Dados	Fórmulas
$a = 36,85 \text{ m}$ $B = 52^\circ 45'$	$C = 90^\circ - B; c = a \cos B$ $b = a \sin B; S = \frac{bc}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
1.º C $90^\circ = 89^\circ 60'$ $B = 52^\circ 45'$ $C = 37^\circ 15'$	1.º $\log a$ $pa \quad 368 \quad \text{---} \quad 5658$ $pa \quad 5 \quad \text{---} \quad 6$
2.º b $\log a = 1,5664$ $\log \sin B = 1,9009$ $\log b = 1,4673$ $b = 29,33 \text{ m}$	2.º $\log \sin B$ $pa \quad 52^\circ 40' \quad \text{---} \quad 9004$ $5' \quad \text{---} \quad 5$ $d = 1,0$ $\frac{5}{5}$
3.º c $\log a = 1,5664$ $\log \cos B = 1,7819$ $\log c = 1,3483$ $c = 22,30 \text{ m}$	3.º $\log \cos B$ $pa \quad 52^\circ 40' \quad \text{---} \quad 7828$ $5' \quad \text{---} \quad -9$ $d = 1,7$ $\frac{5}{8,5}$
4.º S $\log b = 1,4673$ $\log c = 1,3483$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 2,5146$ $S = 327,10 \text{ m}^2$	4.º b $pa \quad 4669 \quad \text{---} \quad 293$ $pa \quad 4 \quad \text{---} \quad .3$
	5.º S $pa \quad 5145 \quad \text{---} \quad 327$ $pa \quad 1 \quad \text{---} \quad .1$

2.º CASO: São dados um cateto e um ângulo agudo: $b, \hat{B}$.

As mesmas relações do Quadro VIII, darão imediatamente as fórmulas da segunda coluna do exemplo abaixo.

Dados	Fórmulas
$b = 85,28\text{m}$ $\hat{B} = 36^\circ 40'$	$C = 90^\circ - \hat{B}$; $c = b \cdot \cot \hat{B}$ $a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$; $S = \frac{bc}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
1.º) C $90^\circ = 89^\circ 60'$ $\hat{B} = 36^\circ 40'$ $\hat{C} = 53^\circ 20'$	1.º) $\log b$ $pa \ 852 \text{ — } 9304$ $pa \ .8 \text{ — } 4$ $\log 85,28 = 1,9308$
2.º) a $\log b = 1,9308$ $\text{colog sen } \hat{B} = 0,2239$ $\log a = 2,1547$ $a = 142,8\text{m}$	2.º) $\log \text{sen } \hat{B} = 1,7761$
3.º) c $\log b = 1,9308$ $\log \cot \hat{B} = 0,1282$ $\log c = 2,0590$ $c = 114,5\text{m}$	3.º) a $pa \ 1523 \text{ — } 142 \ d = 30$ $pa \ 24 \text{ — } .8 \ 24 \mid 30$ $0,8$
4.º) S $\log b = 1,9308$ $\log c = 2,0590$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 3,6888$ $S = 4.884\text{m}^2$	4.º) c $pa \ 0569 \text{ — } 114 \ d = 38$ $pa \ 21 \text{ — } .5 \ 21 \mid 38$ $0,5$
	5.º) S $6884 \text{ — } 488$ $4 \text{ — } .4$

3.º CASO. São dados a hipotenusa e um cateto: a, b .

As relações do Quadro VIII dão as fórmulas, considerando o cálculo prévio do ângulo $\hat{C}$, como se observa na segunda coluna do exemplo.

Dados	Fórmulas
$a = 386\text{m}$ $b = 204\text{m}$	$\text{sen } \hat{B} = \cos C = \frac{b}{a}$; $c = a \text{ sen } C$; $S = \frac{bc}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
1.º) $\hat{B} \text{ e } C$ $\log b = 2,3096$ $\text{colog } a = 3,4134$ $\log \text{sen } \hat{B} = 1,7230$ $\hat{B} = 31^\circ 54'$ $\hat{C} = 58^\circ 6'$	1.º) $\hat{B}$ $pa \ 1,7222 \text{ — } 31^\circ 50' \ d = 2,0$ $pa \ 8 \text{ — } 4' \ 8 \mid 2$ $4'$
2.º) c $\log a = 2,5866$ $\log \text{sen } C = 1,9289$ $\log c = 2,5155$ $c = 327,7\text{m}$	2.º) $\log \text{sen } C$ $pa \ 58^\circ 0' \text{ — } 1,9284 \ d = 0,8$ $pa \ 6' \text{ — } 5 \ 6$ $4,8$
3.º) S $\log b = 2,3096$ $\log c = 2,5155$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 4,5241$ $S = 33.430\text{m}^2$	3.º) c $pa \ 5145 \text{ — } 327$ $pa \ 10 \text{ — } .7$
	4.º) S $pa \ 5237 \text{ — } 334$ $pa \ 4 \text{ — } .3$

OBSERVAÇÃO. Quando a diferença entre a e b é muito pequena, a tábua não determina bem os ângulos por intermédio do seno. Pode-se, então, tomar a fórmula conhecida do quadro VI:

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}}$$

e, por ser $\cos C = \frac{b}{a}$:

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$$

Neste caso, a resolução do triângulo (excluída a área) exige apenas a pesquisa de dois logaritmos: $\log(a+b)$ e $\log(a-b)$, pois o cateto c será calculado pelo teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

4.º CASO. São dados os dois catetos: b , c .

As relações do Quadro VIII permitem obter as fórmulas do exemplo seguinte, calculando-se a depois do ângulo $\hat{C}$.

Dados	Fórmulas
$b = 75,85\text{m}$	$\tan \hat{B} = \cot C = \frac{b}{c}$
$c = 39,77\text{m}$	$a = \frac{b}{\cos C}; S = \frac{bc}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
1.º) $\hat{B}$ e C $\log b = 1,8800$ $\text{colog } c = 2,4004$ $\log \tan \hat{B} = 0,2804$ $\therefore \hat{B} = 62^\circ 20'$ $\hat{C} = 27^\circ 40'$	1.º) $\log b$ $pa \ 758 \text{ — } 8797$ $pa \ .5 \text{ — } 3$
2.º) a $\log b = 1,8800$ $\text{colog } \cos C = 0,0527$ $\log a = 1,9327$ $a = 85,64\text{m}$	2.º) $\log c$ $pa \ 397 \text{ — } 5988$ $pa \ .7 \text{ — } 8$ $\log c = 1,5996$
3.º) S $\log b = 1,8800$ $\log c = 1,5996$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 3,1786$ $S = 1.508\text{m}^2$	3.º) $\log \cos C$ $pa \ 27^\circ 40' - 1,9473$ 4.º) a $pa \ 9325 \text{ — } 856$ $pa \ 2 \text{ — } .4$
	5.º) S $pa \ 1761 \text{ — } 150$ $pa \ 25 \text{ — } .8$ $d = 29$ $250 \mid 29$ $18 \ 0,8$

OBSERVAÇÃO. O cálculo de a , em função dos dados b e c , seria, pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) \text{ e, fazendo } \frac{c}{b} = \tan \alpha$$

$$a^2 = b^2 (1 + \tan^2 \alpha) = b^2 \sec^2 \alpha$$

donde

$$a = \frac{b}{\cos \alpha}$$

O ângulo auxiliar α é, pois, o próprio ângulo C .

4. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer.

1.ª)

LEI DOS SENOS: Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Demonstração.

Seja o triângulo qualquer ABC (fig. 29). Tracemos o círculo circunscrito, seja R , o raio. Temos:

$$\alpha = \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

Considerando o triângulo retângulo ODB :

$$a = 2 \cdot BD = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$$

Assim:

$$a = 2R \cdot \sin \hat{A} \therefore \frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$$

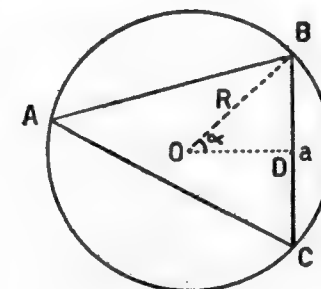


FIG. 29

Analogamente: $b = 2R \cdot \sin \hat{B} \therefore \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$

e $c = 2R \cdot \sin \hat{C} \therefore \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

Logo:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

2.ª)

LEI DOS CO-SENOS. O quadrado do lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto desses dois pelo co-seno do ângulo por eles formado.

Demonstração.

1) Consideremos em primeiro lugar o triângulo acutângulo da fig. 30, I.

As relações geométricas conhecidas permitem concluir:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD \quad (I)$$

O triângulo retângulo ADB dá ainda:

$$AD = c \cdot \cos A.$$

Substituindo em (I):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

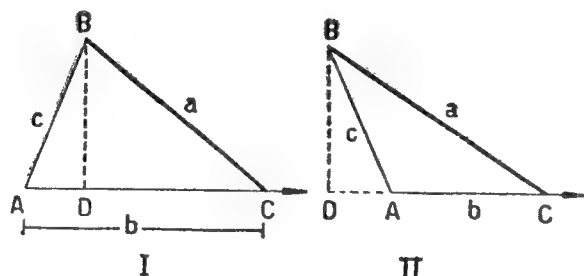


FIG. 30

2) Análogamente, teremos para o triângulo obtusângulo da fig. 30, II.

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AD \quad (II)$$

e, no triângulo retângulo ADB da mesma figura II:

$$AD = c \cdot \cos \hat{BAD} = c \cdot \cos (180 - \hat{A}) = -c \cdot \cos \hat{A}$$

Substituindo na igualdade (II) teremos a mesma relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

o que demonstra a tese para qualquer triângulo.

Do mesmo modo obteríamos para os outros dois lados:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

5. Expressão trigonométrica da área de um triângulo. Pela fórmula geométrica da área do triângulo, temos (fig. I ou II):

$$S = \frac{b \times BD}{2}$$

E, em qualquer das duas figuras, tem-se no triângulo ADB :

$$BD = c \cdot \sin \hat{A},$$

pois $\sin (180 - \hat{A}) = \sin \hat{A}$. Assim, a expressão da área fica:

$$S = \frac{bc \sin \hat{A}}{2}$$

A área de um triângulo é igual ao semiproduto de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

6. Casos clássicos de triângulos quaisquer.

1.º CASO. São dados um lado e dois ângulos: $a, \hat{B}, \hat{C}$.

A lei de Tales dá o terceiro ângulo e a lei dos senos, os dois lados desconhecidos como mostra a coluna "Fórmulas" do exemplo da página seguinte.

Dados	Fórmulas
$a = 357,25\text{m}$ $\hat{B} = 76^\circ 8'$ $C = 56^\circ 20'$	$A = 180^\circ - (\hat{B} + C) \quad b = \frac{a \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{A}}$ $c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \hat{A}} \quad S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
$180^\circ = 179^\circ 60'$ $\hat{B} + C = 132^\circ 28'$ $\hat{A} = 47^\circ 32'$ $\log a = 2,5530$ $\log \operatorname{sen} \hat{B} = 1,9871$ $\operatorname{colog} \operatorname{sen} \hat{A} = 0,1322$ $\log b = 2,6723$ $b = 470,2\text{m}$ $\log a = 2,5530$ $\log \operatorname{sen} C = 1,9203$ $\operatorname{colog} \operatorname{sen} \hat{A} = 0,1322$ $\log c = 2,6055$ $c = 403,2\text{m}$ $\log a = 2,5530$ $\log b = 2,6723$ $\log \operatorname{sen} \hat{C} = 1,9203$ $\operatorname{colog} 2 = 1,6990$ $\log S = 4,8446$ $S = 69.916\text{m}^2$	$357 \text{ — } 5527$ $.25 \text{ — } 3$ $\log a = 2,5530$ $76^\circ \text{ — } 1,9869$ $8' \text{ — } 2$ $\log \operatorname{sen} \hat{B} = 1,9871$ $D = 0,38$ $47^\circ 30' \text{ — } 1,8676$ $2' \text{ — } 2$ $\log \operatorname{sen} \hat{A} = 1,8678$ $D = 1,22$ $6721 \text{ — } 470$ $2 \text{ — } .2$ $6053 \text{ — } 403$ $2 \text{ — } .2$ $8445 \text{ — } 699$ $1 \text{ — } .16$

2.º CASO. São dados dois lados e o ângulo formado: $a, b, \hat{C}$.

Fórmulas.

a) Cálculo dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$: Consideremos o sistema de relações conhecidas:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180 - \hat{C} \quad (1) \quad e \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

Da segunda conclui-se, pelas propriedades das proporções e pelas fórmulas de transformação:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} - \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{A} + \operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}$$

Simplificando o último membro:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}{\tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}} \quad \therefore \tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = \frac{a-b}{a+b} \tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \quad (2)$$

Em virtude da relação (1) temos:

$$\tan \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \tan \left(90 - \frac{\hat{C}}{2} \right) = \cot \frac{\hat{C}}{2}$$

Substituído na (2):

$$\tan \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{\hat{C}}{2}$$

Desta fórmula obtemos o valor de $\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$ e da (1), o valor de $\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

Teremos, então, o sistema:

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \alpha \quad \hat{A} = \alpha + \beta$$

$$\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} = \beta \quad \hat{B} = \alpha - \beta \quad (\text{Ver exemplo numérico}).$$

b) Cálculo de c e S . O cálculo de c efetua-se utilizando a lei dos senos e o da área pelo mesmo teorema do caso anterior, como se vê na coluna das fórmulas do exemplo numérico da página seguinte.

Dados	Fórmulas
$a = 78\text{m}$ $c = 64\text{m}$ $\hat{B} = 43^\circ 18'$	$\tan \frac{\hat{A} - C}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cot \frac{\hat{B}}{2}$ $b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}}$ $S = \frac{ac \sin \hat{B}}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
$\log(a - c) = 1,1461$ $\text{colog}(a + c) = 3,8477$ $\log \cot \frac{\hat{B}}{2} = 0,4013$ $\log \tan \frac{\hat{A} - C}{2} = 1,3951$ $\frac{\hat{A} - C}{2} = 13^\circ 57'$ $\frac{\hat{A} + C}{2} = 68^\circ 21'$ $\hat{A} = 82^\circ 18' \quad \hat{C} = 54^\circ 24'$ $\log a = 1,8921$ $\log \sin \hat{B} = 1,8362$ $\text{colog} \sin \hat{A} = 0,0039$ $\log b = 1,7322$ $b = 53,98\text{m}$ $\log a = 1,8921$ $\log c = 1,8062$ $\log \sin \hat{B} = 1,8362$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 3,2335$ $S = 1.712\text{m}^2$	$a - c = 14$ $a + c = 142$ $\log(a + c) = 2,1523$ $\frac{\hat{B}}{2} = 21^\circ 39'$ $21^\circ 30' \text{ — } 0,4046 \quad d : 3,7$ $9' \text{ — } -33$ $1,3914 \text{ — } 13^\circ 50' \quad d : 5,4$ $37 \text{ — } 7'$ $43^\circ 10' \text{ — } 1,8351 \quad d : 1,4$ $8' \text{ — } 11$ $82^\circ 10' \text{ — } 1,9959 \quad d : 0,2$ $8' \text{ — } 2$ $\log \sin \hat{A} = 1,9961$ $7316 \text{ — } 539$ $6 \text{ — } .8$ $2330 \text{ — } 171$ $5 \text{ — } .2$

3.º CASO. São dados dois lados e o ângulo oposto a um deles: $a, b, \hat{A}$.

O terceiro caso é denominado **duvidoso** porque, sendo dados dois lados e o ângulo oposto a um destes, podem haver dois triângulos, um ou nenhum.

Tracemos o ângulo dado ($\hat{A}$, fig. 31). Tomemos sobre AC um comprimento igual ao lado b e prolonguemos o lado AB , indefinidamente.

O triângulo retângulo CBA dá o valor da perpendicular CB que é $b \sin \hat{A}$, assinalada na figura.

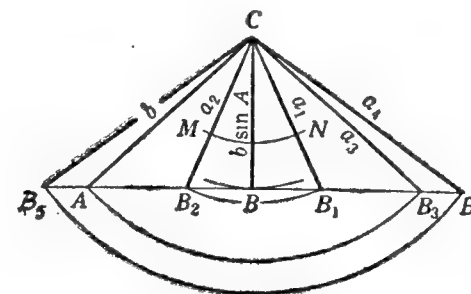


FIG. 31

Podem, então, ocorrer as seguintes possibilidades, de fácil observação na figura 31:

- 1.º) $\hat{A} < 90^\circ$:
- $a < b \sin \hat{A}$ — não há solução. (O arco MN não corta AB)
 - $a = b \sin \hat{A}$ — uma solução ($B = 90^\circ$, triângulo ABC)
 - $a > b \sin \hat{A}$ — duas soluções (triângulos CB_1A e CB_2A)
 - $a > b$ — uma solução (triângulo isósceles CB_3A)
 - $a > b$ — uma solução (triângulo CB_4A)

2.º) $\hat{A} = 90^\circ$ — uma solução, pois, neste caso, tem-se o terceiro caso de triângulos retângulos (não assinado na figura).

3.º) $A > 90^\circ$ $\left\{ \begin{array}{l} a > b - \text{uma solução (triângulo } CB_5A) \\ a \leq b - \text{não há solução (ao maior ângulo deve opor-se maior lado).} \end{array} \right.$

Resolução.

Este caso resolve-se pela lei dos senos e pela lei de Tales, que dão:

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } \hat{A}}{a} \quad (1); \quad \hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} \quad (2) \quad \text{e} \quad c = \frac{a \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} \quad (3)$$

como se observa na coluna “fórmulas” do exemplo numérico.

OBSERVAÇÃO. Se $\log \text{sen } \hat{B} < 0$ (hipótese $b \text{ sen } \hat{A} < a$) as tábuas darão um ângulo agudo $\hat{B}'$ para valor de $\hat{B}$.

O suplemento de $\hat{B}'$:

$$\hat{B}'' = 180^\circ - \hat{B}'$$

terá o mesmo seno. Se, de acordo com a discussão anterior, forem ambos aceitáveis, daí por diante devemos calcular as duas soluções.

Dados	Fórmulas
$a = 14,32\text{m}$ $b = 12,68\text{m}$ $\hat{A} = 42^\circ 55'$	$\text{sen } \hat{B} = \frac{b \text{ sen } \hat{A}}{a} \quad C = 180 - (\hat{A} + \hat{B})$ $c = \frac{a \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} \quad S = \frac{ab \text{ sen } \hat{C}}{2}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
$\log b = 1,1031$ $\log \text{sen } \hat{A} = 1,8331$ $\text{colog } a = 2,8441$ $\log \text{sen } \hat{B} = 1,7803$ $\hat{B} = 37^\circ 5'$ $180^\circ = 179^\circ 60'$ $\hat{A} + \hat{B} = 79^\circ 60'$ $\hat{C} = 100^\circ$ $\log a = 1,1559$ $\log \text{sen } \hat{C} = 1,9934$ $\text{colog sen } \hat{A} = 0,1669$ $\log c = 1,3162$ $c = 20,71\text{m}$ $\log a = 1,1559$ $\log b = 1,1031$ $\log \text{sen } \hat{C} = 1,9934$ $\text{colog } 2 = 1,6990$ $\log S = 1,9514$ $S = 89,42\text{m}^2$	$\begin{array}{r} 143 \text{ ——— } 1553 \\ 2 \text{ ——— } 6 \\ \hline \log a = 1,1559 \end{array}$ $\begin{array}{r} 126 \text{ ——— } 1004 \\ 8 \text{ ——— } 27 \\ \hline \log b = 1,1031 \end{array}$ $\begin{array}{r} 42^\circ 50' \text{ ——— } 1,8324 \\ 5' \text{ ——— } 7 \\ \hline \log \text{sen } \hat{A} = 1,8331 \end{array}$ $\log (b \text{ sen } \hat{A}) = 0,9362 < \log a.$ Discussão. $b \text{ sen } \hat{A} < a, A < 90^\circ$ e $b < a$ — Uma solução. $\begin{array}{r} 1,7795 \text{ ——— } 37^\circ 0' \\ 8 \text{ ——— } 5' \\ \hline \end{array} \quad D = 1,6$ $\begin{array}{r} 3160 \text{ ——— } 207 \\ 2 \text{ ——— } .1 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 9513 \text{ ——— } 894 \\ 1 \text{ ——— } .2 \\ \hline \end{array}$

4.º CASO. Dados os três lados: a , b , c .

a) Cálculo da área. Emprega-se a fórmula de Héron (4.ª Série Ginásial).

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

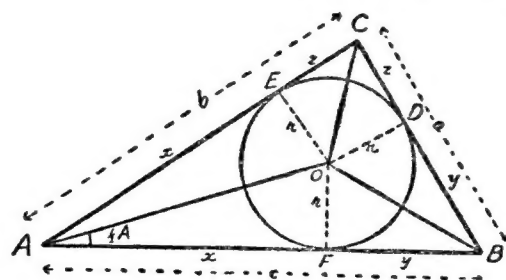


FIG. 32

b) Cálculo dos ângulos.

Na figura 32 o triângulo retângulo AOF fornece a relação:

$$\tan \frac{\hat{A}}{2} = \frac{r}{x} \quad (1)$$

e, ainda:

$$x + y = c$$

$$x + z = b$$

$$y + z = a \quad \therefore x + y + z = \frac{a + b + c}{2} = p.$$

Logo: $x = p - (y + z) = p - a$

Por outro lado, a fórmula conhecida da área (4.ª Série ginásial):

$$S = pr$$

dá

$$r = \frac{S}{p}$$

Substituindo os valores de x e r em (1), temos a fórmula:

$$\tan \frac{\hat{A}}{2} = \frac{S}{p(p-a)}$$

Nos exemplos numéricos, calcularemos primeiro a área e, em seguida, os ângulos, como se observa no exercício numérico (*).

(*) Julgamos mais útil a fórmula do ângulo em função da área, embora exija mais uma parcela nos logaritmos, sugerida pelo distinto colega Prof. ODILIO GRAÇA, do que em função de r , elemento secundário desnecessário.

Dados	Fórmulas
$a = 85,3\text{m}$ $b = 28,9\text{m}$ $c = 67,4\text{m}$	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\tan \frac{\hat{A}}{2} = \frac{S}{p(p-a)}$ $\tan \frac{\hat{B}}{2} = \frac{S}{p(p-b)}; \tan \frac{\hat{C}}{2} = \frac{S}{p(p-c)}$
CÁLCULOS DEFINITIVOS	CÁLCULOS AUXILIARES
$\log p = 1,9581$ $\log(p-a) = 0,7404$ $\log(p-b) = 1,7917$ $\log(p-c) = 1,3692$ $2 \log S = 5,8594$ $\log S = 2,9297$ $\log S = 2,9297$ $\text{colog } p = 2,0419$ $\text{colog}(p-a) = 1,2596$ $\log \tan \frac{\hat{A}}{2} = 0,2312$ $\frac{\hat{A}}{2} = 59^{\circ}34'40'' \quad \therefore \hat{A} = 119^{\circ}9'20''$ $\log S = 2,9297$ $\text{colog } p = 2,0419$ $\text{colog}(p-b) = 1,2083$ $\log \tan \frac{\hat{B}}{2} = 1,1799$ $\frac{\hat{B}}{2} = 8^{\circ}36'20'' \quad \therefore \hat{B} = 17^{\circ}12'40''$ $\log S = 2,9297$ $\text{colog } p = 2,0419$ $\text{colog}(p-c) = 1,6308$ $\log \tan \frac{\hat{C}}{2} = 1,6024$ $\frac{\hat{C}}{2} = 21^{\circ}49' \quad \therefore \hat{C} = 43^{\circ}38'$	$2p = 181,6$ $p = 90,8$ $p-a = 5,5$ $p-b = 61,9$ $p-c = 23,4$ $S) \begin{array}{r} 9294 \\ 3 \end{array} - 850 = 8414$ $\hat{A}) \begin{array}{r} 0,2299 \\ 13 \end{array} - 59^{\circ}30' \text{ d. cl}' = 2,8 \text{ } 4'40''$ $\hat{B}) \begin{array}{r} 1,1745 \\ 54 \end{array} - 8^{\circ}30' \text{ d. cl}' = 8,6 \text{ } 6'20''$ $\hat{C}) \begin{array}{r} 1,5991 \\ 33 \end{array} - 21^{\circ}40' \text{ d. cl}' = 3,7 \text{ } 9'$

EXERCÍCIOS

I — Triângulos retângulos

Resolver o triângulo, sendo dados:

1. $a = 745,8\text{m}$, $\hat{B} = 39^\circ 27'$ Resp.: $50^\circ 33'$; 474m ; 576m ; 13645m^2 .
2. $a = 26,25\text{m}$, $C = 42^\circ 26'$ Resp.: $47^\circ 34'$; $19,37\text{m}$; $17,71\text{m}$; $171,56\text{m}^2$.
3. $a = 2058\text{m}$, $\hat{B} = 55^\circ 45' 20''$ Resp.: $34^\circ 14' 40''$; 1701m ; 1158m ; 985200m^2 .
4. $a = 46,46\text{m}$; $C = 21^\circ 26' 30''$ Resp.: $68^\circ 33' 30''$; $16,98\text{m}$; 25m ; $367,30\text{m}^2$.
5. $b = 2,126\text{m}$ $B = 24^\circ 23'$ Resp.: $65^\circ 37'$; $4,69\text{m}$; $5,15\text{m}$; $4,98\text{m}^2$.
6. $c = 575,9\text{m}$; $C = 29^\circ 35' 40''$ Resp.: $60^\circ 24' 20''$; 1166m ; 1014m ; 292100m^2 .
7. $b = 305\text{m}$; $C = 52^\circ 14' 50''$ Resp.: $37^\circ 45' 10''$; $498,2\text{m}$; $393,9\text{m}$; 60070m^2 .
8. $b = 35,28\text{m}$; $\hat{B} = 26^\circ 38' 50''$ Resp.: $63^\circ 21' 10''$; $78,65\text{m}$; $70,31\text{m}$; 1240m^2 .
9. $a = 20\text{m}$; $c = 16\text{m}$ Resp.: $53^\circ 8'$; $36^\circ 52'$; 12m ; 96m^2 .
10. $a = 121,3\text{m}$; $b = 97,75\text{m}$ Resp.: $71,82\text{m}$; $36^\circ 17' 50''$; $53^\circ 42' 10''$.
11. $a = 988,4\text{cm}$ $c = 587,6\text{cm}$ Resp.: $36^\circ 28'$; $53^\circ 32'$; 785cm ; 233500cm^2 .
12. $a = 287\text{m}$; $b = 148\text{m}$ Resp.: $31^\circ 2' 50''$; $58^\circ 57' 10''$; $245,9\text{m}$; $245,9\text{m}$; 18196m^2 .
13. $b = 12\text{m}$ $c = 60\text{m}$ Resp.: $11^\circ 18'$; $78^\circ 42'$; $61,24\text{m}$.
14. $b = 2,4\text{m}$ $c = 3,2\text{m}$ Resp.: $53^\circ 8'$; $36^\circ 52'$; 4m ; $4,83\text{m}^2$.
15. $b = 320\text{m}$; $c = 215\text{m}$ Resp.: $56^\circ 6' 20''$; $33^\circ 53' 40''$; $385,4\text{m}$; 34393m^2 .
16. $b = 47,56\text{cm}$; $c = 38,72\text{cm}$ Resp.: $50^\circ 51'$; $39^\circ 9'$; $61,33\text{m}$; $920,80\text{m}^2$.

II — Triângulos Obliquângulos

Resolver o triângulo, sendo dados:

17. $a = 20\text{m}$, $\hat{B} = 48^\circ$, $C = 27^\circ$ Resp.: 105° ; $15,39\text{m}$; $9,40\text{m}$; $69,85\text{m}^2$.
18. $b = 61\text{m}$, $\hat{B} = 10^\circ 50'$, $C = 75^\circ 30'$ Resp.: 23m ; $93^\circ 40'$.
19. $c = 1530\text{m}$; $B = 100^\circ 10'$; $C = 45^\circ 40'$ Resp.: $34^\circ 10'$; 1201m ; 2105m ; 904541m^2 .
20. $a = 50\text{m}$; $b = 30\text{m}$; $C = 128^\circ$ Resp.: $32^\circ 57' 10''$ $19^\circ 2' 50''$; $72,43\text{m}$; 591m^2 .

21. $a = 2,698\text{m}$ $c = 5,002\text{m}$ $\hat{B} = 102^\circ 18'$ Resp.: $52^\circ 24'$; $25^\circ 18'$; $6,169\text{m}$.
22. $a = 1745\text{m}$, $b = 1265,4\text{m}$ $C = 80^\circ$ Resp.: $60^\circ 45'$; $39^\circ 15'$; $1969,6\text{m}$; $1.087.000\text{m}^2$.
23. $a = 50\text{m}$ $b = 70\text{m}$, $c = 80\text{m}$ Resp.: $38^\circ 12' 10''$; 60° ; $81^\circ 47' 50''$; 1732m^2 .
24. $a = 74,6\text{m}$, $b = 50,8\text{m}$; $c = 37,44$ Resp.: $114^\circ 36'$; $38^\circ 16'$; $27^\circ 10'$.
25. $a = 63\text{m}$; $b = 72\text{m}$; $c = 81\text{m}$ Resp.: $48^\circ 11' 20''$; $48^\circ 24' 40''$; $73^\circ 24'$; $2173,50\text{m}^2$.
26. $a = 75\text{m}$; $b = 46\text{m}$; $\hat{A} = 35^\circ 20'$ Resp.: $20^\circ 46' 40''$; $123^\circ 53' 20''$; $107,6\text{m}$; 14320m^2 .
27. $a = 70\text{m}$; $c = 19\text{m}$; $C = 15^\circ 40'$ Resp.: Duas soluções: 1.º) $84^\circ 12'$; $80^\circ 8'$; $34,7\text{m}$ 2.º) $95^\circ 48'$; $68^\circ 32'$; $32,7\text{m}$.
28. $a = 63,6\text{m}$; $b = 93\text{m}$; $\hat{B} = 36^\circ 10'$ Resp.: $23^\circ 48'$; $120^\circ 2'$; $136,5\text{m}$.
29. Num triângulo ABC tem-se: $a = 948\text{m}$, $b = 1251\text{m}$, $\hat{A} = 12^\circ 13' 20''$.
Dizer se o problema tem solução e quantas.

III — Problemas de geometria.

30. Calcular o apótema do eneágono regular de lado igual a 7cm . Resp.: $9,616\text{cm}$.
31. Calcular a área de um segmento circular de $38^\circ 26'$ de um círculo de $0,5\text{m}$ de raio Resp.: $0,0061\text{m}^2$.
32. Calcular o volume de um cone de revolução, cuja base tem $1,5\text{m}$ de raio, sabendo que a geratriz forma com (o plano da base um ângulo de $38^\circ 17'$. Resp.: $2,789\text{m}^3$.
33. Calcular o lado do eneágono inscrito num círculo de $5,43\text{cm}$ de raio. Resp.: $3,715\text{cm}$.
34. A geratriz de um cone de revolução tem $2,5\text{dm}$ e o ângulo de abertura $38^\circ 26'$. Calcular o volume. Resp.: $5,094\text{dm}^3$.
35. Calcular o lado e o apótema do pentágono inscrito no círculo de raio igual a 2m . Resp.: $2,36\text{m}$ e $1,62\text{m}$.
36. O lado do eneágono inscrito num círculo mede 3m . Calcular o raio e o apótema do mesmo polígono. Resp.: $4,3\text{m}$ e $4,1\text{m}$.
37. Calcular o lado e o apótema do pentadecágono inscrito no círculo de raio igual a 4dm . Resp.: $1,66\text{m}$ e $3,92\text{m}$.
38. O apótema de um polígono regular de 18 lados mede $6,2\text{cm}$. Calcular o raio e o lado do mesmo polígono. Resp.: $6,3\text{cm}$ e $2,18\text{cm}$.
39. Uma escada, apoiada sobre um muro vertical, forma com ele um ângulo de 30° . O pé da escada fica a $2,5\text{m}$ do muro. A que altura do muro atinge a escada e qual seu comprimento? Resp.: $4,33\text{m}$ e 5m .

40. O ângulo do vértice de um triângulo isósceles tem $48^\circ 40'$ e a altura 25dm. Calcular os lados e a base. *Resp.*: 27, 43 e 22, 61.
41. Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm 38° cada um e o lado, 10dm. Calcular o ângulo do vértice, a base e a altura. *Resp.*: 102° , 15,76dm e 6,15dm.
42. Num retângulo, a diagonal tem 20dm e forma com o lado maior do retângulo um ângulo de 27° . Calcular os lados do retângulo. *Resp.*: 9,08dm e 17,82dm.
43. Num círculo de raio igual a 4,6dm, calcular o comprimento de uma corda que subtende um arco de 38° . *Resp.*: 1,49dm.
44. Uma corda de 3dm forma com o diâmetro traçado de sua extremidade de um ângulo de 36° . Calcular o raio do círculo. *Resp.*: 1,8dm.
45. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem respectivamente 4m e 6m e formam um ângulo de 63° . Calcular a área. *Resp.*: $21,38\text{m}^2$.

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

46. Em um triângulo, retângulo em A, calcular $\text{tg}(A+B-2C)$ em função dos catetos b e c . (E. Eng. U. Recife, 1955) *Resp.*: $\frac{c}{b} \cdot \frac{3b^2 - c^2}{3c^2 - b^2}$
47. Sendo $\hat{B}$ e C ângulos agudos de um triângulo retângulo, resolver:
 $\sqrt{3} (\text{tg} \hat{B} - 1) = 1 - \text{tg} C$ (Fil. São Bento — São Paulo — 1950)
Resp.: 1) $\hat{B} = C = 45^\circ$ (E.F.E. — 1960)
 2) $B = 30^\circ, C = 60^\circ$
48. Em todo triângulo tem-se: $\text{sen} \frac{\hat{B} - C}{2} = \frac{b - c}{a} \cos \frac{A}{2}$. Provar (E. N. Q. — 1952)
49. Resolver o triângulo retângulo: $a = 85\text{m}$ e $\hat{B} = 32^\circ 40'$ (E.P.U.C. — Rio 1948) *Resp.*: $\hat{C} = 57^\circ 20'$, $b = 45,87\text{m}$ e $c = 71,56\text{m}$
50. Os senos de dois ângulos de um triângulo sendo iguais a $1/2$ e $\sqrt{3}/2$ e o perímetro do triângulo medindo 18 cm, os lados desse triângulo medem..... (E. Flu. E. — 1957) *Resp.*: $6(3 - \sqrt{3})$, $3(3 - \sqrt{3})$, $9(\sqrt{3} - 1)$.
51. Dados a hipotenusa $a = 10$ e $c = 6$, achar os ângulos $\hat{B}$ e C . (F. Fil. U.E.G. — Rio, 1946). *Resp.*: $36^\circ 52' 12''$ e $53^\circ 7' 48''$

52. Dados $\hat{A} = 45^\circ$, $b = 4$ e $c = \sqrt{2}$, calcular o seno e o co-seno de cada um dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, do triângulo ABC. (E. Militar — 1941).
Resp.: $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{6}$
53. Dada a relação $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$, entre os catetos de um triângulo retângulo, calcular os ângulos agudos desse triângulo, sem uso de tábuas (E. Militar 1941) *Resp.*: 75° e 15° .
54. Os catetos de um triângulo retângulo medem 2 e $\sqrt{12}$. Calcular a hipotenusa e os ângulos (E. Militar — 1945). *Resp.*: $4,30^\circ$, 60° .
55. Em um triângulo tem-se $b = 30\text{m}$, projeção de c sobre a igual a 8m e $\text{sen} C = 0,2$. Calcule $\text{sen} B$. (E. Flu. E. — 1958) *Resp.*: 0,6
56. Dado um triângulo ABC no qual $\hat{B} = 3C$ e $C < \hat{A} < \hat{B}$, calcular o ângulo $\hat{C}$ de modo que a razão do menor lado para o maior seja igual a $\frac{1}{2}$ (E.P.U.C. — 1958, Rio) *Resp.*: 30°
57. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 5dm e tem lugar a relação $\text{sen} \hat{B} = \frac{1}{2} \text{sen} C$. Calcular os catetos e o raio do círculo inscrito, a menos de 0,01. (E. Téc. Ex. — 1948) *Resp.*: 2,24dm, 4,47dm, 0,85 dm.
58. A área de um triângulo retângulo é de 144m^2 e um dos ângulos é o triplo do outro. Calcular os lados (E.P.U. — São Paulo, 1948). *Resp.*: 28,53; 26,28 e 10,92.
59. A razão entre dois lados de um triângulo é $2 + \sqrt{3}$ e o ângulo por eles formado é de 60° . Calcule os outros dois ângulos do triângulo. (E.N.E. — 1959) *Resp.*: 105° e 15° .
60. Calcule a hipotenusa de um triângulo retângulo de área 50m^2 , sabendo que um dos ângulos agudos é igual a 15° . (E.F.E. — 1960) *Resp.*: 20m.
61. Num triângulo ABC tem-se: $\cot \hat{A} = 2$ e $\cot \hat{B} = 3$. Calcular a altura relativa ao menor lado, em função do lado, cuja medida está compreendida entre as medidas dos outros lados. (E.N.E. 1954)
Resp.: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
62. Uma pirâmide triangular tem as arestas laterais iguais à aresta da base. Calcule o ângulo da aresta lateral com o plano da base. (E.P.U.C. — Rio — 1959) *Resp.*: 45° .

63. Se num triângulo existir a relação $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}}{\cos \hat{B} + \cos \hat{C}}$ o triângulo é retângulo. Provar.
(E.P.U.C. — Rio — 1955).
64. Num tetraedro a base é equilátera e o triedro do vértice principal é trirretângulo. Calcular os senos dos ângulos que as faces formam com a base. (E. E. S. Carlos — S. Paulo — 1959) *Resp.*: $\sqrt{6}/3$.
65. Em uma circunferência de diâmetro $AB = 2R$, traça-se uma corda AC que forma com AB um ângulo θ . Achar θ de modo que, fazendo-se girar a figura em torno de AB , a área gerada pela corda AC seja equivalente a $3/2$ da área gerada pelo arco BC . (E.T.Ex. — 1955)
Resp.: $\theta = 30^\circ$.